ESERCIZIO del giorno 17/04/2012

Esercizio 1
Si consideri l'applicazione lineare

$$f : R^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definita da

$$f(x, y) = (x + y, x, y)$$

determinare, se esistono, tutte le applicazioni lineare $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tali che $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

Svolgimento.
La matrice associata a f rispetto alle basi canoniche è:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ è che siano soddisfatte le condizioni:

$$\begin{array}{rrr} g(f(1,0)) = & g(1,1,0) = & (1,0) \\ g(f(0,1)) = & g(1,0,1) = & (0,1) \end{array} \qquad (1)$$

Allora detta

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

la matrice associata a g rispetto alle basi canoniche sappiamo che (scritti i vettori in colonna)
$g(x_1, x_2, x_3) = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
Imponiamo le condizioni trovate in (1):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ d + e = 0 \\ a + c = 0 \\ d + f = 1 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} b = 1 + c \\ e = f - 1 \\ a = -c \\ d = 1 - f \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto che tutte le applicazioni g richieste devono avere matrice associata rispetto alle basi canoniche del tipo

$$\begin{pmatrix} -c & 1 + c & c \\ 1 - f & f - 1 & f \end{pmatrix}$$

con $c, f \in \mathbb{R}$
Quindi tutte le applicazioni lineari che soddisfano alle condizioni richieste sono:

$$g_{c,f}(x_1, x_2, x_3) = (-cx_1 + (1+c)x_2 + cx_3, (1-f)x_1 + (f-1)x_2 + fx_3)$$

al variare di $c, f \in \mathbb{R}$.

Questa è la descrizione esplicita dell'applicazione lineare $g_{c,f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che soddisfa alle tre condizioni:

$$\begin{array}{rl} g_{c,f}(1,1,0) = & (1,0) \\ g_{c,f}(1,0,1) = & (0,1) \\ g_{c,f}(0,0,1) = & (c,f) \end{array}$$

Inoltre come ulteriore verifica

$$\begin{array}{rcl} g_{c,f} \circ f(x,y) & = & g_{c,f}(f(x,y)) = g_{c,f}(x+y, x, y) = \\ & = & (-c(x+y) + (1+c)x + cy, (1-f)(x+y) + (f-1)x + fy) = \\ & = & (x,y) \end{array}$$