ESERCIZIO del giorno 21/03/2012

Si considerino S_1 e S_2 sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale delle matrici $M_{2,3}(\mathbb{R})$ definiti da:

$$S_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$S_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 10 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \rangle$$

a) Determinare una base di S_1, una base di S_2, una base di $S_1 \cap S_2$, una base di $S_1 + S_2$ e le rispettive dimensioni;

b) La somma di S_1 e S_2 è diretta?

c) Determinare se esiste $V_1 \leq M_{2,3}(\mathbb{R})$ di dimensione 1 tale che $S_1 + V_1 = S_1 + S_2$;

d) Determinare se esiste $V_2 \leq M_{2,3}(\mathbb{R})$ di dimensione 2 tale che $S_1 + V_2 = S_1 + S_2$. Se esiste è unico?

e) Determinare se esiste $V_3 \leq M_{2,3}(\mathbb{R})$ di dimensione 3 tale che $S_1 + V_3 = S_1 + S_2$.