ESERCIZI del giorno 28/03/2012

Esercizio 1
Si consideri l'applicazione lineare $f : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b + c, a + d, 3b - d)$$

a) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(f)$, una base di $\mathrm{Im}(f)$ e relative dimensioni.

b) L'applicazione lineare f è iniettiva? È suriettiva?

c) Determinare se esiste $V \leq M_{2,2}(\mathbb{R})$ tale che $\mathrm{Ker}(f) \oplus V = M_{2,2}(\mathbb{R})$;

d) Determinare $f^{-1}(\{(1, 0, 0)\})$;

e) Determinare se esiste $S \leq M_{2,2}(\mathbb{R})$ di dimensione 3 tale che $f(S) = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 2
Costruire se possibile un'applicazione lineare tale che:

a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ iniettiva;

b) $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettiva;

c) $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ non iniettiva tale che
$f(\langle e_1, e_2\rangle) = \langle e_3, e_4\rangle \quad ; \quad f(\langle e_1, e_3\rangle) = \langle e_1, e_3\rangle$.

Tali applicazioni sono uniche?