Foglio di esercizi numero 6
Corso di Matematica 2
Ingegneria Meccanica

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare canonico determinare la proiezione ortogonale del vettore $v = (1, 3, 2)$ sul sottospazio $V = \langle(-1, 2, 2), (0, -1, 1)\rangle$.

Esercizio 2. Si consideri la proiezione ortogonale

$$p_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

di $\mathbb{R}^3$ sul sottospazio $W = \langle(1, 0, 1), (1, 1, 2)\rangle$.

1. Determinare la matrice associata a p_W rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinare Imp_W.
3. Determinare $p_W(1, 1, 1)$.

Esercizio 3. Ortonormalizzare la base $\{(-1/2, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Dato $W = \langle(-1, 3, 1/2, -2), (1, 0, 2, 4)\rangle$, determinare le equazioni cartesiane del sottospazio $W^\perp$ di $\mathbb{R}^4$. Determinare una base di $W^\perp$.

Esercizio 5. Determinare il sottospazio vettoriale $(\ker A)^\perp$ di $\mathbb{R}^4$ essendo A la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare canonico e sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare, dipendente dal parametro t, definita da:

$$T(x, y, z) = (x + ty + z, y + (t + 1)z, (t - 1)x + y).$$

Determinare, al variare del parametro t, una base del sottospazio ortogonale ad ImT.

Esercizio 7. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare euclideo determinare una base ortonormale del sottospazio $S = \langle(-1, 0, 1), (2, -1, 0)\rangle$. Determinare, inoltre, il sottospazio $S^\perp$.

Esercizio 8. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare euclideo, determinare una base ortonormale del sottospazio $S = \langle (3, -1, 0), (0, 2, -2) \rangle$.

Esercizio 9. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare euclideo e sia S il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $(1, -1, 0)$ e $(2, 1, 1)$. Determinare una base ortonormale di S ed estendere tale base ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 10. Si consideri $\mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare euclideo e sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ tale che $f(1, 2) = (k + 2, -3)$, $f(-1, 0) = (4, -2)$, con $k \in \mathbb{R}$. Determinare il valore di k per il quale f è simmetrico.
[Risultato: $k = -2$.]

Esercizio 11. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare euclideo e sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che sui vettori della base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 2), (0, 0, 1), (1, 2, 2)\}$ agisce nel modo seguente:

$$f(1, 0, 2) = (0, 1, 2) \quad f(0, 0, 1) = (0, 0, 1) \quad f(1, 2, 2) = (2, 1, 2).$$

Determinare, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f.