LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTE-TERRITORIO

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

II^a prova di accertamento – Padova GG-MM-AA

TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

a) Una matrice di cambiamento di base ha sempre determinante 1.

b) Se A e B sono due matrici quadrate in $M_2(\mathbb{R})$ entrambe diagonalizzabili allora A è simile a B.

c) La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U_1 =< \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >; \qquad U_2 =< \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > .$$

a) Determinare equazioni cartesiane per U_1 ed U_2.

b) Determinare una base ed equazioni cartesiane per $U_1 \cap U_2$.

c) Determinare una base ed equazioni cartesiane per $U_1 + U_2$.

d) Determinare un sottospazio $T \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus (U_1 \cap U_2) = U_1 + U_2$.

Esercizio 2 In $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, si considerino i sottospazi $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b+c=0; c-d=0 \right\}$ e $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+2b+c=0; c-d=0 \right\}$. Si considerino poi i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 =< \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >; \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x-2y=0 \right\}.$$

a) Esiste un'applicazione lineare $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(V_1 = W_1$ ed $f(V_2) = W_2$? È unica?

b) Sia f un'applicazione come al punto precedente. Scelte a piacere delle basi per $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ed $\mathbb{R}^3$, scrivere la matrice di f rispetto a tali basi.

c) Calcolare $\ker f$ ed $\operatorname{Im} f$.

d) Determinare $f^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate