LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, AMBIENTE-TERRITORIO
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
II^a prova di accertamento – Padova GG-MM-AA
TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

a) Una matrice di cambiamento di base ha sempre determinante 1.

b) Se A e B sono due matrici quadrate in $M_2(\mathbb{R})$ entrambe diagonalizzabili allora A è simile a B.

c) La matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Si considerino le applicazioni lineari $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definite da:
$$f_k(x, y, z) = (kx + y + kz, -x + ky + z, x + z, (k-1)x + (k+1)y + (k+1)z)$$
al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

a) Determinare $f_k^{-1}(\{(\alpha, \alpha, 0, 0)\})$ con $k, \alpha \in \mathbb{R}$ (cioè risolvere il sistema lineare $\Sigma_{k,\alpha}$:
$$\Sigma_{k,\alpha} : \begin{cases} kx + y + kz = \alpha \\ -x + ky + z = \alpha \\ x + z = 0 \\ (k-1)x + (k+1)y + (k+1)z = 0 \end{cases}$$
sistema lineare nelle incognite x, y, z di parametri reali k, α).

b) Determinare un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $v \notin \operatorname{Im} f_k$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

c) Determinare, se esiste, una base B_k di $\mathbb{R}^3$ (i cui vettori dipendono dal parametro reale k) tale che la matrice associata a f_k rispetto alla base B_k nel dominio e base canonica $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^4}$ di $\mathbb{R}^4$ nel codominio sia:
$$A_{(f_k, B_k, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^4})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2 Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$: $U =< (1, 2, 1) >$, $S =< (1, 2, 1), (0, 1, 0) >$ e $T =< (0, 0, 1) >$.

a) Esiste f endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che S sia autospazio relativo all'autovalore 1 e T sia autospazio relativo all'autovalore -1? Se si è unico? È diagonalizzabile?

b) Determinare (fornendo la matrice associata rispetto ad una base scelta dallo studente) tutti gli endomorfismi f di $\mathbb{R}^3$ tali che U sia autospazio di autovalore 1, T sia autospazio di autovalore -1 e $f(S) = S$.

c) Fra tutti gli endomorfismi trovati al punto b) quali sono diagonalizzabili in $\mathbb{R}$? Quali sono diagonalizzabili in $\mathbb{C}$?

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate