Analisi Stocastica 2014/15, Foglio I

3 ottobre 2014

Esercizio 1. Sia X_0 una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}^d$. Sia $b\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una funzione globalmente lipschitziana. Per $x_0 \in \mathbb{R}^d$ sia $\Psi(x_0, .) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^d$ la soluzione dell'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{d}{dt} x(t) = b\left(x(t)\right)$$

con condizione iniziale $x(0) = x_0$. Poniamo

$$X(t, \omega) \doteq \Psi\left(X_0(\omega), t\right), \quad t \in [0, \infty),\ \omega \in \Omega.$$

a) Si verifichi che $X \doteq (X(t))_{t \geq 0}$ è un processo stocastico misurabile e si caratterizzi la sua filtrazione naturale. Cosa si può dire delle traiettorie di X?

b) Supponiamo che X_0 abbia media e covarianze finite e che b sia lineare, cioè $b(x) = Ax$ per una matrice $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Per $t \geq 0$ si calcoli la media di $X(t)$. Nel caso che $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_d)$ sia una matrice diagonale, si calcoli inoltre la matrice di covarianza di $X(t)$.

Esercizio 2. Sia $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti a valori in $[0, \infty)$ con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$ definita su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Per $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$ poniamo

$$X(t, \omega) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{(0,t]} \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) \right),$$

dove $\mathbf{1}_{(0,t]}$ denota la funzione indicatrice dell'intervallo $(0, t]$.

a) Si costruiscano in maniera esplicita lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ e le variabili esponenziali i.i.d. $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Si verifichi che $X \doteq (X(t))_{t \geq 0}$ è un processo stocastico misurabile a valori in $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ e che X è indistinguibile da un processo a valori in $\mathbb{N}_0$ con traiettorie continue a destra e costanti a tratti.

c) Per $t \geq 0$ si calcoli la distribuzione di $X(t)$.

d) Per $n \in \mathbb{N}$ poniamo $\mathcal{F}_n \doteq \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Fissato $t > 0$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $X(t)$ è $\mathcal{F}_n$-misurabile?

e) Si dimostri che $\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : X(.,\omega)$ è continua in $t\}) = 1$ per ogni $t \geq 0$. Esiste una versione di X che abbia traiettorie continue con probabilità uno?

Esercizio 3. Sia $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie reali di quadrato integrabili definite su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Se le X_k, $k \in \mathbb{N}$, sono a due a due scorrelate e tali che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(X_k) = 0,$$

allora (X_k) soddisfa la legge debole dei grandi numeri (dimostrazione?).

Supponiamo ora che le X_k, $k \in \mathbb{N}$, siano indipendenti e tali che

$$\mathbf{P}(X_k = k) = \mathbf{P}(X_k = -k) = \frac{1}{2k\log(k+1)}, \quad \mathbf{P}(X_k = 0) = 1 - \frac{1}{k\log(k+1)}.$$

Poniamo $Y_n \doteq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Si dimostri che, per $n \to \infty$, Y_n converge a zero in probabilità, ma non quasi certamente. [Suggerimento per la non-convergenza: lemma di Borel-Cantelli]

Esercizio 4. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $\sigma, \tilde{\sigma} \in [0,\infty)$. Siano $\mu \doteq N(a,\sigma^2)$, $\nu \doteq N(b,\tilde{\sigma}^2)$ le leggi normali su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ rispettivamente di media a e b e di varianza σ^2 e $\tilde{\sigma}^2$. Supponiamo che $\sigma > 0$ e $\tilde{\sigma} > 0$; si dimostri che allora μ, ν sono misure equivalenti nel senso che μ è assolutamente continua rispetto a ν e vice versa ν rispetto a μ. Si calcoli la densità di μ rispetto a ν nel caso in cui $\sigma = \tilde{\sigma}$. Cosa succede se $\sigma = 0$ o $\tilde{\sigma} = 0$?

Esercizio 5. Per $n \in \mathbb{N}$ siano $b_n \in \mathbb{R}^d$, Γ_n una matrice $d \times d$ semidefinita positiva, e $\mu_n \doteq N(b_n, \Gamma_n)$ la legge gaussiana di media b_n e matrice di covarianza Γ_n. Supponiamo che i limiti $b \doteq \lim_{n\to\infty} b_n$, $\Gamma \doteq \lim_{n\to\infty} \Gamma_n$ esistano rispettivamente in $\mathbb{R}^d$ e $\mathbb{R}^{d\times d}$. Si dimostri che $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente a $\mu \doteq N(b,\Gamma)$.

Esercizio 6. Sia $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie reali indipendenti di legge $N(0,\sigma^2)$. Siano $\alpha \in (-1,1)$, $x \in \mathbb{R}$. Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la successione di variabili aleatorie definita per ricorrenza da

$$X_0 \doteq x, \qquad\qquad X_{n+1} \doteq \alpha X_n + Z_{n+1},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

a) Quali sono le leggi di X_0, X_1, X_2?

b) Si dimostri che la successione $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge in legge e si determini la legge limite.

c) Si dimostri che la successione $((X_n, X_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}_0}$ di variabili aleatorie bidimensionali converge in legge e si determini la legge limite.

Esercizio 7. Siano X, Y variabili aleatorie definite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ a valori rispettivamente in $(E_1, \mathcal{E}_1)$ e $(E_2, \mathcal{E}_2)$. Sia ϕ una mappa $E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ misurabile e limitata, e sia $\mathcal{G}$ una sotto-σ-algebra di $\mathcal{F}$. Si verifichi la seguente implicazione: Se X è indipendente da $\mathcal{G}$ e Y è $\mathcal{G}$-misurabile, allora

$$\mathbf{E}\left[\phi(X,Y)|\mathcal{G}\right] = \mathbf{E}\left[\phi(X,y)\right]_{y=Y} \quad \mathbf{P}\text{-q.c.},$$

cioè $\mathbf{E}\left[\phi(X,Y)|\mathcal{G}\right] = f(Y)$ $\mathbf{P}$-quasi certamente, dove la funzione $f: E_2 \to \mathbb{R}$ è data da $f(y) \doteq \mathbf{E}\left[\phi(X,y)\right]$, $y \in E_2$.

Esercizio 8. Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sotto-σ-algebra, e X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}^d$. Si dimostri la seguente implicazione: Se esiste una funzione $\phi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ tale che per ogni $y \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbf{E}\left[e^{\sqrt{-1}\langle X,y\rangle} \,\middle|\, \mathcal{G}\right] = \phi(y) \quad \mathbf{P}\text{-quasi certamente},$$

allora X ha funzione caratteristica ϕ ed è indipendente da $\mathcal{G}$.

Esercizio 9. Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sotto-σ-algebra, e X una variabile aleatoria non-negativa con $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[X] = 1$. Definiamo una misura di probabilità $\mathbf{Q}$ su $\mathcal{F}$ mediante

$$\mathbf{Q}(A) \doteq \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[\mathbf{1}_A \cdot X\right], \quad A \in \mathcal{F}.$$

Si dimostri che allora

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[Y|\,\mathcal{G}\right] = \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[Y \cdot X|\,\mathcal{G}\right]}{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[X|\,\mathcal{G}\right]}$$

per ogni variabile aleatoria Y a valori in $\mathbb{R}$ limitata.

Contatto: Markus Fischer (fischer@math.unipd.it)