Analisi Stocastica 2014/15, Foglio II

17 ottobre 2014

Esercizio 1. Siano X, Y, Z variabili aleatorie reali definite su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

a) Supponiamo che la legge di Z ammetta densità f rispetto alla misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ e che la legge congiunta di (X, Z) ammetta densità g rispetto alla misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^2$. Si dimostri che allora per ogni $\phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile e limitata,

$$\mathbf{E}\left[\phi(X)|Z\right] = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \cdot \frac{g(x,Z)}{f(Z)} dx \quad \mathbf{P}\text{-quasi certamente.}$$

b) Nella situazione di a), si concluda che $g(.,z)/f(z)$ è una densità (rispetto alla misura di Lebesgue) della legge condizionale di X dato $Z = z$.

c) Supponiamo ora che X, Y siano indipendenti di legge $N(0, \sigma^2)$. Per $z \in \mathbb{R}$, si determini la legge condizionale di X dato $X + Y = z$.

Esercizio 2. Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti di legge $N(0, 1)$, e sia $\alpha > 0$. Si dimostri che

$$\mathbf{P}\left(X_n > \sqrt{\alpha \log(n)} \text{ per infiniti indici } n\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \leq 2, \\ 0 & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

Si dimostri inoltre che

$$\frac{X_n}{\sqrt{\log(n)}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

in probabilità ma non quasi certamente.

Esercizio 3. Sia $\mathcal{V}$ una collezione non vuota di variabili aleatorie reali definite sullo stesso spazio di probabilità. Supponiamo che $\mathcal{V}$ sia una famiglia gaussiana (cioè la distribuzione congiunta di ogni sottoinsieme finito di $\mathcal{V}$ è gaussiana).

a) Siano $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}$ tali che $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$. Si dimostri che $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ sono indipendenti se e solo se X, Y sono indipendenti per ogni $X \in \mathcal{V}_1$, $Y \in \mathcal{V}_2$.

b) Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ e supponiamo che $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia convergente in L^2 a una variabile aleatoria X. Si verifichi che $\{X\} \cup \mathcal{V}$ è ancora una famiglia gaussiana.

Esercizio 4. Sia $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormale di $L^2([0,1])$, cioè $\langle e_n, e_m\rangle = 0$ se $n \neq m$, $\langle e_n, e_n\rangle = 1$ e $\lim_{n\to\infty} \|f - \sum_{k=1}^{n}\langle f, e_n\rangle e_n\| = 0$ per ogni $f \in L^2([0,1])$, dove $\langle f, g\rangle \doteq \int_0^1 f(x)g(x)dx$ è il prodotto scalare in $L^2([0,1])$ e $\|f\| \doteq \sqrt{\langle f, f\rangle}$ la norma indotta. Sia $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti di legge $N(0,1)$ definite su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Per $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$X_n(t,\omega) \doteq \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) \left\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, e_k \right\rangle, \quad t \in [0,1],\, \omega \in \Omega.$$

a) Si dimostri che per ogni $t \in [0,1]$ fissato $(X_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $L^2(\mathbf{P})$.

b) Per $t \in [0,1]$ denotiamo con $X(t)$ il limite in $L^2(\mathbf{P})$ di $(X_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$. Si verifichi che $(X(t))_{t\in[0,1]}$ è un processo gaussiano e si calcolino la funzione di media e quella di covarianza.

c) Qual'è il legame con la costruzione del moto browniano di Lévy-Ciesielski vista a lezione?

Esercizio 5. Sia $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtrazione $\mathcal{F}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità e $(W(t))_{t\geq 0}$ un moto browniano rispetto a $(\mathcal{F}_t)$. Poniamo

$$Z(t) \doteq W(t) - \int_0^t \frac{W(s)}{s} ds, \quad t \geq 0,\, \omega \in \Omega.$$

a) Si verifichi che Z è ben definito (l'integrale converge) con probabilità uno.

b) Si dimostri che Z è un moto browniano rispetto alla sua filtrazione naturale $(\mathcal{F}_t^Z)_{t\geq 0}$. [Sugg.: il limite in distribuzione di variabili gaussiane è di nuovo una variabile gaussiana]

c) Si verifichi che Z è $(\mathcal{F}_t)$-adattato, ma non un moto browniano rispetto a $(\mathcal{F}_t)$.

d) Si dimostri che $W(t)$ è indipendente da $\mathcal{F}_t^Z$ per ogni $t \geq 0$.

Esercizio 6. Sia $(W(t))_{t\geq 0}$ un moto browniano standard definito su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Poniamo

$$B(t,\omega) \doteq W(t,\omega) - tW(1,\omega), \quad t \in [0,1],\, \omega \in \Omega.$$

a) Si calcoli la funzione di covarianza di $B = (B(t))_{t\in[0,1]}$.

b) Si determinino funzioni $g : [0,1] \to [0,1]$ e $h : [0,1] \to [0,\infty]$ tali che il processo X definito da

$$X(t,\omega) \doteq g(t)W\left(h(t),\omega\right), \quad t \in [0,1],\, \omega \in \Omega,$$

abbia la stessa funzione di covarianza di B.

c) Si dimostri che il processo definito da

$$Y(t,\omega) \doteq (1+t)B\left(\tfrac{t}{1+t},\omega\right), \quad t \in [0,\infty),\, \omega \in \Omega,$$

è un moto browniano.

Esercizio 7. Sia $(W(t))_{t\geq 0}$ un moto browniano standard definito su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Per $a > 0$ poniamo $\tau_a(\omega) \doteq \inf\{t \geq 0 : W(t,\omega) \geq a\}$, $\omega \in \Omega$. Si calcolino le trasformate di Laplace delle due funzioni

$$[0,\infty) \ni t \mapsto \mathbf{P}\left(W(t) \geq a\right) \qquad e \qquad [0,\infty) \ni t \mapsto \frac{1}{2}\,\mathbf{P}\left(\tau_a \leq t\right)$$

e si concluda che

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s\in[0,t]} W(s) \geq a\right) = \mathbf{P}\left(\tau_a \leq t\right) = 2\,\mathbf{P}\left(W(t) \geq a\right).$$

Esercizio 8. Sia $(E, \mathcal{B}(E))$ uno spazio polacco, e sia $X(t))_{t\in[0,T]}$ un processo stocastico a valori in $(E, \mathcal{B}(E))$ con insieme dei tempi $[0,T]$ definito sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Supponiamo che X abbia traiettorie continue. Sia $\mathbf{C}([0,T],E)$ lo spazio delle funzioni continue $[0,T] \to E$ munito della convergenza uniforme, e sia $\mathcal{C} \doteq \mathcal{B}(\mathbf{C}([0,T],E))$ la corrispondente σ-algebra dei boreliani. Si dimostri che la mappa

$$\Psi \colon \Omega \ni \omega \mapsto \Psi(\omega) \doteq X(\cdot,\omega) \in \mathbf{C}([0,T],E)$$

è $\mathcal{F}$-$\mathcal{C}$-misurabile. [Sugg.: Se $\mathcal{C}_0$ è un generatore di $\mathcal{C}$ (cioè $\mathcal{C}_0$ un sistema di sottoinsiemi di $\mathbf{C}([0,T],E)$ tale che $\sigma(\mathcal{C}_0) = \mathcal{C}$), allora basta verificare che $\Psi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ per ogni $B \in \mathcal{C}_0$.]

Esercizio 9. Sia $\mathcal{X}$ uno spazio metrico separabile con σ-algebra dei boreliani $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità, ξ una variabile aleatoria a valori in $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, e $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una sotto-σ-algebra. Si dimostri che se ξ è indipendente da $\mathcal{G}$ e allo stesso tempo $\mathcal{G}$-misurabile, allora ξ è costante $\mathbf{P}$-quasi certamente.

Contatto: Markus Fischer (fischer@math.unipd.it)