Analisi Stocastica 2014/15, Foglio III

31 ottobre 2014

Nel seguito $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ denota uno spazio di probabilità completo e $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtrazione in $\mathcal{F}$.

I primi tre esercizi riguardano il moto browniano d-dimensionale. Un processo stocastico $(W(t))_{t\geq 0}$ a valori in $\mathbb{R}^d$ definito su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ si dice *moto browniano d-dimensionale* rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ se

(i) $W(0) = 0 \in \mathbb{R}^d$ $\mathbf{P}$-quasi certamente,

(ii) W è $(\mathcal{F}_t)$-adattato,

(iii) per ogni $t > s \geq 0$, $W(t) - W(s)$ ha distribuzione $N(0, (t-s)\,\mathrm{Id}_d)$ ed è indipendente da $\mathcal{F}_s$,

(iv) W ha traiettorie continue $\mathbf{P}$-quasi certamente.

Quando la filtrazione $(\mathcal{F}_t)$ non viene specificata si intende per $(\mathcal{F}_t)$, come al solito, la filtrazione naturale del processo.

Esercizio 1. Sia $(W(t))_{t\geq 0}$ un moto browniano d-dimensionale rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $W = (W_1, \ldots, W_d)^{\mathsf{T}}$.

a) Si verifichi che i processi reali $W_1, \ldots, W_d$ sono moti browniani rispetto a $(\mathcal{F}_t)$ e che sono indipendenti (cioè le σ-algebre $\sigma(W_i(t) : t \geq 0)$, $i \in \{1, \ldots, d\}$), sono indipendenti). Si verifichi inoltre che la σ-algebra degli incrementi $\sigma(W(t) - W(s) : t \geq s)$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$ per ogni $s \geq 0$.

b) Sia $z \in \mathbb{R}^d$ con $|z| = 1$. Si dimostri che il processo reale $\langle z, W \rangle$ è un moto browniano rispetto a $(\mathcal{F}_t)$.

c) Sia A una matrice $d \times d$. Poniamo $X(t, \omega) \doteq AW(t, \omega)$, $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$. Si dimostri che X è un moto browniano d-dimensionale se e solo se A è una matrice ortogonale.

d) Si verifichi che per ogni $x > 0$, ogni $t > 0$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s\in[0,t]} |W(s)| \geq x\right) \leq 2d \exp\left(-\frac{x^2}{2dt}\right).$$

Esercizio 2. Sia $(W(t))_{t\geq 0}$ un moto browniano d-dimensionale e B la palla aperta di raggio uno e centro l'origine in $\mathbb{R}^d$. Sia τ il tempo di prima uscita di W da B, cioè $\tau(\omega) \doteq \inf\{t \geq 0 : W(t, \omega) \notin B\}$, $\omega \in \Omega$.

a) Si verifichi che $\tau < \infty$ $\mathbf{P}$-quasi certamente. Di conseguenza $W(\tau)$ può essere considerata una variabile aleatoria a valori in ∂B (ovvero nella sfera unitaria $(d-1)$-dimensionale).

b) Si dimostri che la legge di $W(\tau)$ è la misura di Haar con massa uno su ∂B (cioè la misura di probabilità sui boreliani di ∂B che è invariante rispetto al gruppo di isometrie della sfera).

c) Si dimostri infine che τ e $W(\tau)$ sono indipendenti.

Esercizio 3. Sia $(W(t))_{t\geq 0}$ un moto browniano d-dimensionale e $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ un insieme di misura di Lebesgue finita e strettamente positiva. Si dimostri, applicando il teorema di Fubini, che

$$\mathbf{E}\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_A(W(t))dt\right] = \begin{cases} \infty & \text{se } d \in \{1,2\} \\ \frac{1}{2}\pi^{-d/2}\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)\int_A |x|^{2-d}dx & \text{se } d \geq 3, \end{cases}$$

dove $\Gamma(.)$ indica la funzione Gamma. L'integrale $\int_0^\infty \mathbf{1}_A(W(t,\omega))dt$ si può interpretare come il tempo che la traiettoria $W(.,\omega)$ trascorre in A.

Esercizio 4. Sia $(W(t))_{t\geq 0}$ un moto browniano standard. Per $k \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\begin{aligned} \xi_k &\doteq -2\pi k\sqrt{2}\int_0^1 W(t)\cos(2\pi kt)dt, \\ \tilde{\xi}_k &\doteq \sqrt{2}W(1) + 2\pi k\sqrt{2}\int_0^1 W(t)\sin(2\pi kt)dt. \end{aligned}$$

Si calcolino le distribuzioni delle ξ_k, $\tilde{\xi}_k$, $k \in \mathbb{N}$, e si dimostri che si tratta di variabili aleatorie indipendenti.

Esercizio 5. Sia $(W(t))_{t\geq 0}$ un moto browniano standard definito su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Per $a > 0$ poniamo $\tau_a(\omega) \doteq \inf\{t \geq 0 : W(t,\omega) \geq a\}$, $\omega \in \Omega$. Si dimostri che la legge di τ_a è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e ne si calcoli la densità. La media di τ_a è finita? E quella di $\sqrt{\tau_a}$?

Esercizio 6. Si trovi un esempio di un aperto $U \subset \mathbb{R}$ e uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con un processo stocastico reale X e una filtrazione $(\mathcal{F}_t)$ tale che $\tau_U \doteq \inf\{t \geq 0 : X(t) \in U\}$, il tempo di primo ingresso di X in U, è un tempo opzionale ma non un tempo d'arresto rispetto a $(\mathcal{F}_t)$; cioè $\{\tau_U < t\} \in \mathcal{F}_t$ per ogni $t \geq 0$, mentre esiste un $t \geq 0$ tale che $\{\tau_U \leq t\} \notin \mathcal{F}_t$. [Sugg.: Lo spazio Ω può avere solo due elementi, la filtrazione può essere quella generata da X.]

Esercizio 7. Sia $(M(t))_{t\geq 0}$ una martingala rispetto a $(\mathcal{F}_t)$ con traiettorie continue e $M(0) = 0$ $\mathbf{P}$-quasi certamente. Supponiamo inoltre che per la variazione quadratica $\langle M\rangle$ di M valga con probabilità uno

$$\langle M\rangle(t) = t \text{ per ogni } t \geq 0.$$

Si dimostri che allora M è un moto browniano uno-dimensionale rispetto a $(\mathcal{F}_t)$.

Esercizio 8. Sia X una martingala continua e non-negativa rispetto a $(\mathcal{F}_t)$ tale che $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$ $\mathbf{P}$-quasi certamente. Siano $s \geq 0$, $b > 0$. Poniamo $\tau_b \doteq \inf\{t \geq s : X(t) = b\}$.

(a) Si verifichi che τ_b è un tempo d'arresto rispetto a $(\mathcal{F}_t)$ e che $\mathbf{P}$-quasi certamente

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\geq s} X(t) \geq b \,|\, \mathcal{F}_s\right) = \frac{1}{b}\,\mathbf{E}\left[X(\tau_b)\,|\,\mathcal{F}_s\right] \text{ sull'evento } \{X(s) < b\}.$$

(b) Si dimostri che $\mathbf{P}$-quasi certamente

$$\mathbf{E}\left[X(\tau_b)\,|\,\mathcal{F}_s\right] \cdot \mathbf{1}_{\{X(s)<b\}} = X(s) \cdot \mathbf{1}_{\{X(s)<b\}}.$$

(c) Si concluda che

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\geq s} X(t) \geq b\right) = \mathbf{P}\left(X(s) \geq b\right) + \frac{1}{b}\,\mathbf{E}\left[X(s) \cdot \mathbf{1}_{\{X(s)<b\}}\right].$$

Esercizio 9. Sia W un moto browniano uno-dimensionale rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Poniamo $\tau_a \doteq \inf\{t \geq 0 : |W(t)| \geq a\}$, dove $a > 0$.

(a) Si verifichi che τ_a è un tempo d'arresto rispetto a $(\mathcal{F}_t)$ e si dimostri che $\mathbf{P}(\tau_a < \infty) = 1$.

(b) Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Si mostri che il processo

$$X(t) \doteq \cos(\lambda W(t)) \cdot e^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}, \quad t \geq 0,$$

è una martingala. [Sugg.: verificare che $Y(t) \doteq \exp\left(\sqrt{-1}\lambda W(t) + \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)$ è una martingala complessa.]

(c) Sia $\lambda \in (-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a})$. Si mostri che allora

$$\mathbf{E}\left[e^{\frac{1}{2}\lambda^2(t\wedge\tau_a)}\right] \leq \frac{1}{\cos(\lambda\cdot a)} \text{ per } t \geq 0, \qquad \mathbf{E}\left[e^{\frac{1}{2}\lambda^2\tau_a}\right] = \frac{1}{\cos(\lambda\cdot a)}.$$

(d) Si calcoli il valor atteso di τ_a. [Sugg.: Usare la funzione generatrice dei momenti implicitamente calcolata al punto precedente.]

Contatto: Markus Fischer (fischer@math.unipd.it)