Analisi Stocastica 2014/15, Foglio IV

21 novembre 2014

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità completo, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtrazione in $\mathcal{F}$ che soddisfi alle ipotesi standard.

Esercizio 1. Sia $(X(t))_{t\geq 0}$ una $(\mathcal{F}_t)$-martingala con $X(0) = 0$ e traiettorie continue. Per $c \in \mathbb{R}$ poniamo $\tau_c \doteq \inf\{t \geq 0 : X(t) = c\}$. Siano $a, b > 0$ costanti e $\tau \doteq \tau_{-a} \wedge \tau_b$; τ coincide con il tempo di prima uscita di X dall'intervallo $(-a, b)$.

a) Si verifichi che τ_{-a}, τ_b, τ sono tempi d'arresto rispetto a $(\mathcal{F}_t)$.

b) Supponiamo che X sia tale che $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 1$. Si calcolino le probabilità $\mathbf{P}(X(\tau) = -a)$ e $\mathbf{P}(X(\tau) = b)$.

c) Supponiamo ora che X sia un moto browniano standard. Si calcoli il valor atteso $\mathbf{E}[\tau]$. [Sugg.: In questo caso $(X^2(t) - t)_{t\geq 0}$ è una martingala.]

Esercizio 2. Sia $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie reali identicamente distribuite e di quadrato integrabili. Supponiamo che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, ξ_k sia $\mathcal{F}_k$ misurabile ed indipendente da $\mathcal{F}_{k-1}$. Sia S_0 una variabile aleatoria reale di quadrato integrabile e $\mathcal{F}_0$-misurabile. Definiamo la passeggiata aleatoria $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ attraverso $S_n \doteq S_0 + \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $n \in \mathbb{N}$.

a) In quale ipotesi sulla distribuzione comune delle ξ_k abbiamo che $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ è una sub- oppure una supermartingala rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$?

b) Sia $(S(t))_{t\geq 0}$ il processo che risulta dall'interpolazione lineare a tratti di $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Supponiamo che $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sia una submartingala rispetto a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Vale allora la proprietà di submartingala anche per $(S(t))_{t\geq 0}$ rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$?

c) Supponiamo di avere $S_0 \equiv 0$ e $\mathbf{E}[\xi_k] = 0$. Per $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ un processo reale (a tempo discreto) adattato a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ e di quadrato integrabile poniamo $(u \cdot S)_0 \doteq 0$ e

$$(u \cdot S)_n \doteq \sum_{k=1}^{n} u_{k-1}(S_k - S_{k-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si dimostri che $((u \cdot S)_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ è una $(\mathcal{F}_n)$-martingala e si calcoli $\mathbf{E}\left[(u \cdot S)_n^2\right]$ per $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 3. Sia $(X(t))_{t\geq 0}$ una martingala continua e di quadrato integrabile rispetto a $(\mathcal{F}_t)$. Indichiamo con $\langle X\rangle$ la variazione quadratica di X. Sia u un processo $(\mathcal{F}_t)$-progressivamente misurabile e tale che

$$u(t,\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\omega) \doteq \mathbf{1}_{(t_{i-1},t_i]}(t), \quad (t,\omega)\in[0,\infty)\times\Omega,$$

per una partizione $0 \doteq t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ di $[0,\infty)$ (cioè $t_n \nearrow \infty$ per $n\to\infty$) e variabili aleatorie reali $\xi_1, \xi_2, \ldots$ tali che, per ogni $i\in\mathbb{N}$, ξ_i è limitata e misurabile rispetto a $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$. L'integrale di Itô per un tale processo u rispetto a X fino al tempo $t\geq 0$ è dato da

$$I_t(u)(\omega) \doteq \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega)\cdot\left(X(t_i\wedge t,\omega) - X(t_{i-1}\wedge t,\omega)\right), \quad \omega\in\Omega.$$

a) Si dimostri che il processo $(I_t(u))_{t\geq 0}$ è una martingala continua e di quadrato integrabile rispetto a $(\mathcal{F}_t)$.

b) Si calcoli la variazione quadratica di $(I_t(u))$ in termini della variazione quadratica di X.

Esercizio 4. Sia $(X(t))_{t\geq 0}$ una submartingala rispetto a $(\mathcal{F}_t)$ con traiettorie continue a destra. Sia $T>0$.

a) Si dimostri che per ogni $x>0$, ogni $p\geq 1$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} X(t) > x\right) \leq \frac{1}{x^p}\,\mathbf{E}\left[(X(T)\vee 0)^p\right] \leq \frac{1}{x^p}\,\mathbf{E}\left[|X(T)|^p\right].$$

b) Si dimostri che per ogni $x>0$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} X(t) > x\right) \leq \inf_{\lambda>0} e^{-\lambda x}\,\mathbf{E}\left[e^{\lambda X(T)}\right].$$

c) Supponiamo ora che $X=W$ con W un moto browniano (uno-dimensionale). Si dimostri che per ogni $x>0$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} W(t) > x\right) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right).$$

Esercizio 5. Sia $(X(t))_{t\geq 0}$ una submartingala rispetto a $(\mathcal{F}_t)$ con traiettorie continue a destra. Siano σ, τ tempi d'arresto rispetto a $(\mathcal{F}_t)$.

a) Supponiamo che $\sigma\leq\tau$. Si dimostri che allora per ogni $t\geq 0$

$$\mathbf{E}\left[X(\tau\wedge t)|\mathcal{F}_\sigma\right] \geq X(\sigma\wedge t) \quad \mathbf{P}\text{-q.c.}$$

[Sugg.: sappiamo che $(X((\tau\wedge t))_{t\geq 0}$ è una $(\mathcal{F}_t)$-submartingala; approssimare σ con tempi d'arresto discreti.]

b) Supponiamo ora che τ sia limitato (cioè $\tau \leq T$ per un tempo deterministico $T > 0$). Poniamo $\tilde{X}(t) \doteq X(\tau + t) - X(\tau)$, $\tilde{\mathcal{F}}_t \doteq \mathcal{F}_{\tau+t}$, $t \geq 0$. Si dimostri che $\tilde{X}$ è una submartingala rispetto a $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$.

Esercizio 6. Sia $(Y(t))_{t\geq 0}$ una martingala (oppure sub- oppure supermartingala) rispetto a $(\mathcal{F}_t)$. Sia X una modificazione di Y. Si dimostri che allora anche X è una martingala (oppure sub-/supermartingala) rispetto a $(\mathcal{F}_t)$.

Esercizio 7. Sia $(W(t))_{t\geq 0}$ un moto browniano uno-dimensionale definito su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, sia $(\mathcal{F}^W_t)_{t\geq 0}$ la filtrazione naturale di W. Sia $\mathcal{N}$ il sistema degli eventi $\mathbf{P}$-trascurabili. Poniamo $\tilde{\mathcal{F}}_t \doteq \mathcal{F}^W_t \vee \mathcal{N}$, $t \geq 0$. Si dimostri che la filtrazione $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ soddisfa alle ipotesi standard e che W è un moto browniano rispetto a $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$.

Esercizio 8. Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ un processo a valori in $\mathbb{R}$ integrabile e adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

a) Si dimostri che

$$X_n = M_n + A_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

per una $(\mathcal{F}_n)$-martingala M e un processo A con $A_0 = 0$ e predicibile rispetto a $(\mathcal{F}_n)$.

b) Si verifichi che la scomposizione di X data sopra è univoca.

c) Potrebbe aver senso un'affermazione analoga per processi integrabili adattati a tempo continuo e con traiettorie continue?

Contatto: Markus Fischer (fischer@math.unipd.it)