Analisi Stocastica 2014/15, Foglio V

12 dicembre 2014

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità completo con $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtrazione in $\mathcal{F}$ che soddisfi alle ipotesi standard.

Esercizio 1. Sia $(X(t))_{t\geq 0}$ una martingala *locale* rispetto a $(\mathcal{F}_t)$ con traiettorie càdlàg. Si dimostrino le seguenti implicazioni:

a) Se esiste $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tale che $|X(t)| \leq Y$ per ogni $t \geq 0$, allora X è una $(\mathcal{F}_t)$-martingala.

b) Se $\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} |X(s)|\right] < \infty$ per ogni $t \geq 0$, allora X è una $(\mathcal{F}_t)$-martingala.

c) Se $X(t) \geq 0$ per ogni $t \geq 0$, allora X è una $(\mathcal{F}_t)$-supermartingala.

Esercizio 2. Sia W un moto browniano rispetto a $(\mathcal{F}_t)$, sia $T > 0$. Poniamo

$$\xi_1 \doteq \int_0^T W(t)dt, \qquad \xi_2 \doteq \int_0^T \sqrt{|W(t)|}dW(t),$$
$$\xi_3 \doteq \int_0^T W^2(t)dt, \qquad \xi_4 \doteq \int_0^T (W(t)+t)^2\, dW(t).$$

Si calcolino media e varianza delle variabili aleatorie $\xi_1, \ldots, \xi_4$.

Esercizio 3. Sia W un moto browniano rispetto a $(\mathcal{F}_t)$. Sia $f \in L^2_{loc}([0,\infty))$ una funzione deterministica.

a) Qual'è la distribuzione della variabile aleatoria $\int_0^T f(t)dW(t)$ per $T > 0$?

b) Si dimostri che $Z_f(t) \doteq \exp\left(\int_0^t f(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |f(s)|^2 ds\right)$, $t \geq 0$, è una martingala rispetto a $(\mathcal{F}_t)$. Per $T > 0$ si calcoli inoltre $\mathbf{E}\left[Z_f(T)Z_g(T)\right]$ con $g \in L^2_{loc}([0,\infty))$ e Z_g definito in analogia a Z_f; Z_f, Z_g sono gli esponenziali stocastici rispettivamente di $\int_0^\cdot f(s)dW(s)$ e di $\int_0^\cdot g(s)dW(s)$.

c) Supponiamo che f sia continua ed a variazione totale finita. Si dimostri che allora per ogni $T > 0$

$$\int_0^T f(t)dW(t) = W(T)f(T) - \int_0^T W(t)df(t).$$

Esercizio 4. Sia W un moto browniano rispetto a $(\mathcal{F}_t)$, sia $c \in \mathbb{R}$. Poniamo $X(t) \doteq W(t) + c\,t$, $t \geq 0$; il processo X è un *moto browniano con drift (deriva)*. Per $x \in \mathbb{R}$ definiamo il tempo d'arresto $\tau_x \doteq \inf\{t \geq 0 : X(t) = x\}$. Si calcoli $\mathbf{P}(\tau_x < \infty)$, la probabilità che X raggiunga il livello x in tempo finito.

Esercizio 5. Sia W un moto browniano rispetto a $(\mathcal{F}_t)$. Sia u un processo reale in Λ^2 e sia Z l'esponenziale stocastico di $\int_0^{\cdot} u(s)dW(s)$. Poniamo $Y(t) \doteq 1/Z(t)$, $t \geq 0$.

a) Si verifichi che il processo Y è ben definito ed in Λ^2.

b) Si dimostri che Y è soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$dY(t) = Y(t)u^2(t)dt - Y(t)u(t)dW(t)$$

con condizione iniziale $Y(0) = 1$.

Esercizio 6. Sia W un moto browniano d-dimensionale rispetto a $(\mathcal{F}_t)$, sia ξ una variabile aleatoria $\mathcal{F}_0$-misurabile a valori in $\mathbb{R}^n$. Siano $A\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $b\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, $\sigma\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n\times d}$ funzioni deterministiche misurabili e localmente limitate. Sia $\Phi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ la soluzione fondamentale dell'equazione differenziale lineare associata ad A, cioè la soluzione di

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = A(t)\Phi(t),\ t \geq 0, \qquad \Phi(0) = \mathrm{Id}_n\,.$$

La matrice $\Phi(t)$ è invertibile per ogni $t \geq 0$. Poniamo

$$X(t) \doteq \Phi(t)\left(\xi + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)dW(s)\right),\ t \geq 0.$$

Si dimostri che X è soluzione dell'equazione differenziale lineare con rumore additivo

$$dX(t) = \left(A(t)X(t) + b(t)\right)dt + \sigma(t)dW(t)$$

e condizione iniziale $X(0) = \xi$. Nel caso unodimensionale ($n = d = 1$) e funzioni A, b, σ costanti nel tempo si dia un'espressione più esplicita di X.

Esercizio 7. Per $n \in \mathbb{N}_0$ definiamo la funzione reale

$$H_n(t,x) \doteq \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n} e^{\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 t}\Big|_{\alpha=0}, \quad (t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R};$$

$H_n(t,x)$ è il coefficiente n-esimo nella serie di Taylor della funzione $\mathbb{R} \ni \alpha \mapsto e^{\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 t}$.

a) Si dimostri la seguente relazione di ricorrenza: $H_0 \equiv 1$, $H_1(t,x) = x$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$xH_n(t,x) - tH_{n-1}(t,x) = (n+1)H_{n+1}(t,x), \quad (t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}.$$

b) Si verifichi che, per ogni $t \in [0,\infty)$ fissato, $H_n(t,x)$ è un polinomio in x di grado n con $x^n/n!$ come termine di grado massimo.

c) Si verifichino le seguenti relazioni per le prime derivate parziali:

$$\frac{\partial}{\partial x}H_0(t,x) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}H_n(t,x) = H_{n-1}(t,x),\ n \in \mathbb{N},$$
$$\frac{\partial}{\partial t}H_i(t,x) = 0,\ i \in \{0,1\}, \quad \frac{\partial}{\partial t}H_n(t,x) = -\frac{1}{2}H_{n-2}(t,x),\ n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_n(t,x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_n(t,x).$$

d) Per $t > 0$ indichiamo con $p_t(.)$ la densità della legge $N(0,t)$. Si dimostri che per ogni $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(t,x) H_m(t,x) p_t(dx) = \begin{cases} \frac{t^n}{n!} & \text{se } n = m, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

e) Sia W un moto browniano rispetto a $(\mathcal{F}_t)$. Si dimostri che $(H_n(t, W(t)))_{t \geq 0}$ è una $(\mathcal{F})_t$-martingala.

Esercizio 8. Sia W un moto browniano rispetto a $(\mathcal{F}_t)$. Siano $T > 0$, $\sigma > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, e sia F una funzione in $\mathbf{C}^2(\mathbb{R})$ tale che $F'' \in \mathbf{C}_b(\mathbb{R})$. Per $u \in \mathcal{H}_T^2$ poniamo

$$X^u(t) \doteq x_0 + \int_0^t u(s) ds + \sigma W(t), \quad t \in [0,T],$$

e definiamo un funzionale $J\colon \mathcal{H}_T^2 \to \mathbb{R}$ mediante

$$J(u) \doteq \mathbf{E}\left[\frac{1}{2}\int_0^T |u(t)|^2 dt + F\left(X^u(T)\right)\right].$$

Supponiamo di avere una funzione $V \in \mathbf{C}^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ tale che $V'' \in \mathbf{C}_b([0,T] \times \mathbb{R})$ (derivata seconda rispetto alla variabile di spazio continua e limitata) e che

$$\begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) = \inf_{\gamma \in \mathbb{R}} \left\{\frac{1}{2}|\gamma|^2 + \gamma \cdot V'(t,x)\right\} + \frac{\sigma^2}{2} V''(t,x) & \text{se } (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}, \\ V(T,x) = F(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Poniamo, per $u \in \mathcal{H}_T^2$,

$$Y^u(t) \doteq V\left(t, X^u(t)\right) + \frac{1}{2}\int_0^t |u(s)|^2 ds, \quad t \in [0,T].$$

(i) Si verifichi che, per ogni $u \in \mathcal{H}_T^2$, X^u è un processo continuo, adattato a $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$ e di quadrato integrabile e che $J(u)$ è ben definito.

(ii) Si calcoli, per ogni $u \in \mathcal{H}_T^2$, il differenziale stocastico di Y^u.

(iii) Si dimostri che, per ogni $u \in \mathcal{H}_T^2$, Y^u è una submartingala rispetto a $(\mathcal{F}_t)$ e che $J(u) = \mathbf{E}\left[Y^u(T)\right]$.

(iv) Sia $\bar{X}$ un processo continuo e $(\mathcal{F}_t)$-adattato tale che

$$\bar{X}(t) = x_0 - \int_0^t V'\left(s, \bar{X}(s)\right) ds + \sigma W(t), \quad t \in [0,T].$$

[In realtà, $\bar{X}$ è univocamente determinato (modulo indistinguibilità di processi) come soluzione continua e adattata dell'equazione integrale di sopra;

ciò è una conseguenza del teorema di esistenza e unicità di Itô; cf. Capitolo 5 del corso.] Poniamo

$$\bar{Y}(t) \doteq V\left(t, \bar{X}(t)\right) + \frac{1}{2}\int_0^t |V'\left(s, \bar{X}(s)\right)|^2 ds, \quad t \in [0,T].$$

Si dimostri che $\bar{Y}$ è una martingala rispetto a $(\mathcal{F}_t)$.

(v) Si dimostri che

$$\mathbf{E}\left[\bar{Y}(T)\right] = \inf_{u \in \mathcal{H}_T^2} J(u).$$

Contatto: Markus Fischer (fischer@math.unipd.it)