Analisi Stocastica 2014/15, Foglio VI

15 gennaio 2015

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità completo con $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtrazione in $\mathcal{F}$ che soddisfa le ipotesi standard e W un moto browniano d-dimensionale rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Esercizio 1. Sia $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}; \mathbb{R}^n)$, e sia $T > 0$. Siano $b\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ funzioni misurabili tali che valgano unicità traiettoriale ed esistenza di soluzioni forti per l'EDS

$$dX(t) = b\left(t, X(t)\right) dt + \sigma\left(t, X(t)\right) dW(t), \quad t \in [0,T]. \tag{1}$$

Sia X la soluzione forte dell'EDS (1) con condizione iniziale $X(0) = \xi$. Sia u un processo a valori in $\mathbb{R}^d$ limitato e progressivamente misurabile rispetto a $(\mathcal{F}_t)$. Si dimostri che allora esiste una soluzione Y dell'EDS

$$dY(t) = b\left(t, Y(t)\right) dt + \sigma\left(t, Y(t)\right) u(t)dt + \sigma\left(t, Y(t)\right) d\tilde{W}(t), \quad t \in [0,T],$$

con condizione iniziale $Y(0) = \xi$ e $\tilde{W}$ un (altro) moto browniano d-dimensionale. [Sugg.: Teorema di Girsanov.]

Esercizio 2. Sia $x \in \mathbb{R}^d$. Siano $b\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\sigma\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ funzioni continue e limitate tali che l'EDS

$$dX(t) = b\left(X(t)\right) dt + \sigma\left(X(t)\right) dW(t), \quad t \geq 0,$$

possegga una soluzione forte con condizione iniziale $X(0) = x$. Per $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ si calcolino i limiti

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t} \mathbf{E}\left[X_i(t) - x_i\right], \qquad \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t} \mathbf{E}\left[\left(X_i(t) - x_i\right)\left(X_j(t) - x_j\right)\right].$$

Esercizio 3. Sia $D \subset \mathbb{R}^d$ un aperto limitato e connesso. Siano $\phi\colon \partial D \to \mathbb{R}$, $\psi : D \to \mathbb{R}$ funzioni continue e limitate. Supponiamo di avere una funzione $f\colon \mathrm{cl}(D) \to \mathbb{R}$ continua e due volte differenziabile con continuità su D tale che

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta f(x) = -\psi(x) & \text{se } x \in D, \\ f(x) = \phi(x) & \text{se } x \in \partial D. \end{cases}$$

Sia $x \in D$. Poniamo $\tilde{W}(t) \doteq W(t) + x$, $t \geq 0$, e $\tau \doteq \inf\{t \geq 0 : \tilde{W}(t) \notin D\}$. Si dimostri che

$$f(x) = \mathbf{E}\left[\phi\left(\tilde{W}(\tau)\right) + \int_0^\tau \psi\left(\tilde{W}(s)\right) ds\right].$$

[Sugg.: Si verifichi che il processo $X(t) \doteq f(\tilde{W}(t \wedge \tau)) + \int_0^{t\wedge\tau} \psi(\tilde{W}(s))ds$, $t \geq 0$, è una martingala uniformemente integrabile.]

Esercizio 4. Supponiamo $d = 1$, cioè W uno-dimensionale. Si trovi la soluzione dell'EDS

$$dX(t) = t\,X(t)dt + e^{t^2/2}dW(t)$$

con condizione iniziale $X(0) = 1$.

Esercizio 5. Supponiamo $d = 1$, cioè W uno-dimensionale. Per $\theta \geq 0$ poniamo $\tau_\theta \doteq \inf\{t \geq \theta : W(t) = 0\}$. Definiamo il processo scalare $X^{(\theta)}$ mediante

$$X^{(\theta)}(t,\omega) \doteq \begin{cases} (W(t,\omega))^3 & \text{se } t \geq \tau_\theta(\omega), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si verifichi che, per ogni $\theta \geq 0$, $X^{(\theta)}$ è una soluzione dell'EDS

$$dX(t) = 3(X(t))^{1/3}dt + 3(X(t))^{2/3}dW(t), \quad t \geq 0,$$

con condizione iniziale $X(0) = 0$.

Esercizio 6. Supponiamo che $d = 1$, cioè W un moto browniano uno-dimensionale. Si trovi la soluzione dell'EDS

$$dX(t) = t\,X(t)dt + e^{t^2/2}dW(t)$$

sull'intervallo di tempo $[0, 1)$ con condizione iniziale $X(0) = 0$. Si verifichi che la soluzione è un processo gaussiano, e si determini la sua funzione di covarianza.

Esercizio 7. Supponiamo che $d = 1$, cioè W un moto browniano uno-dimensionale. Sia $T > 0$. Si trovino una costante $c \in \mathbb{R}$ e un processo $u \in \mathcal{H}_T^2$ tali che

$$\cos(W(T)) = c + \int_0^T u(t)dW(t) \quad \mathbf{P}\text{-q.c.}$$

[Sugg.: Si verifichi che il processo $X(t) \doteq e^{t/2}\cos(W(t))$, $t \in [0, T]$, è una martingala.]

Esercizio 8. Siano $b : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ funzioni misurabili tali che, per una costante $K \in (0,\infty)$ e una successione $(L_M) \subset (0,\infty)$,

(L) $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq L_M |x-y|$ se $|x| \vee |y| \leq M,\ t \geq 0,$

(C) $2\,\langle b(x), x\rangle + \mathrm{trace}\left(\sigma\sigma^{\mathsf{T}}(t,x)\right) \leq K\left(1+|x|^2\right)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0.$

Si dimostri allora che l'EDS

$$dX(t) = b\left(X(t)\right)dt + \sigma\left(X(t)\right)dW(t), \quad t \geq 0,$$

possiede un'unica soluzione forte per una qualsiasi condizione iniziale $\mathcal{F}_0$-misurabile e di quadrato integrabile.

[Suggerimenti: localizzazione attraverso tempi d'arresto; per l'unicità traiettoriale è sufficiente l'ipotesi (L) (più il fatto che $b(.,0)$, $\sigma(.,0)$ siano limitate grazie alla (C)); per l'esistenza, si costruisca la soluzione come limite X_∞ delle soluzioni X_R, $R > 0$, dell'equazione con coefficienti troncati; per mostrare l'esistenza di X_∞ per tutti i tempi, si considerino i processi $t \mapsto e^{-Kt}(1+|X_R(t)|^2)$.]

Contatto: Markus Fischer (fischer@math.unipd.it)