Probabilità e Statistica 2017/18	Nome:
Primo compitino (traccia **A**)	Cognome:
18 aprile 2018	Matricola:

Esercizio 1. Scegliamo "a caso" una mano di cinque carte da un mazzo di carte da poker (mazzo di 52 carte). Si calcolino le probabilità dei seguenti eventi:

(i) Le cinque carte sono dello stesso seme.

(ii) La mano contiene carte di tutti e quattro i semi.

(iii) La mano contiene tre carte del seme dei fiori e due di quello dei cuori.

Esercizio 2. Un candidato cerca di superare una prova scritta che consiste in 20 domande a risposta multipla, ciascuna con tre alternative di risposta di cui esattamente una corretta. La prova è superata se almeno 17 dei 20 quesiti vengono risolti con la scelta della risposta giusta.

(i) Si calcoli la probabilità che il candidato superi la prova scegliendo a caso, per ciascuna delle domande, una delle tre alternative di risposta.

(ii) Sia $N \in \mathbb{N}$. Si calcoli la probabilità che il candidato adottando la strategia del punto precedente superi la prova in N tentativi.

(iii) Supponiamo ora che le 20 domande (insieme alle corrispondenti alternative di risposta) vengano estratte a caso da un bacino di 1000 quesiti, e che il candidato sappia dare la risposta giusta con certezza per 500 di quei 1000 quesiti. Si calcoli la probabilità che il candidato superi la prova solo grazie a domande di cui conosce con certezza la risposta corretta.

Esercizio 3. Siano C_1, C_2, C_3 eventi indipendenti ed equiprobabili su uno spazio di probabilità discreto $(\Omega, \mathbf{P})$ con comune probabilità 1/2. Poniamo

$$X_0(\omega) \doteq 0, \quad \omega \in \Omega,$$

e definiamo le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3 per ricorsione mediante

$$X_i(\omega) \doteq \begin{cases} X_{i-1}(\omega) + 1 & \text{se } \omega \in C_i, \\ X_{i-1}(\omega) - 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Si determinino le distribuzioni di $X_0, \ldots, X_3$.

(ii) Si calcoli la probabilità condizionale dell'evento $\{X_2 = 0\}$ dato che $\{X_3 < 0\}$.

(iii) Si verifichi se gli eventi $\{X_2 \geq 0\}$ e $\{X_3 \leq 0\}$ sono indipendenti o meno.

Esercizio 4. Per ogni $m \in \mathbb{N}$, si trovi una densità discreta $p = p_{(m)}$ su $\mathbb{N}_0$ tale che

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p(k) = 1 \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (k-1)^2 \cdot p(k) = m.$$

Contatto: M. Fischer (fischer@math.unipd.it)