Probabilità e Statistica 2016/17	Nome:
Secondo compitino	Cognome:
22 giugno 2017	Matricola:

Di seguito, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ denota uno spazio di probabilità abbastanza "ricco" per supportare le variabili aleatorie specificate.

Esercizio 1. Nei seguenti tre casi si determinino media e varianza della variabile aleatoria reale X (se esistono):

(i) X tale che $\mathbf{P}(X = 0) = 1/2$, $\mathbf{P}(X = 1) = 1/3$, $\mathbf{P}(X = 2) = 1/6$;

(ii) $X = \sin(2\pi U)$ con U una variabile aleatoria uniforme su $[0, 1]$;

(iii) $X = \exp\left(Y^2\right)$ per una variabile aleatoria Y normale standard.

Esercizio 2. Sia $L \in (0, \infty)$, e siano b, g funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$|b(x) - b(y)| \leq L\,|x - y| \quad \text{e} \quad |g(x) - g(y)| \leq L\,|x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

Sia $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con media zero e varianza uno. Sia $h \in (0, 1]$. Definiamo una funzione $\Psi \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante

$$\Psi(x, z) \doteq x + h \cdot b(x) + \sqrt{h} \cdot g(x) \cdot z,$$

e poniamo

$$v(x) \doteq \mathbf{E}\left[|\Psi(x, \xi)|\right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Si verifichi che, per $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[|\Psi(x, \xi) - \Psi(y, \xi)|^2\right] &= |x - y + h\,(b(x) - b(y))|^2 \\ &\quad + \mathbf{E}\left[\left|\sqrt{h}\,(g(x) - g(y))\,\xi\right|^2\right],\end{aligned}$$

e ne si deduca che

$$\mathbf{E}\left[|\Psi(x, \xi) - \Psi(y, \xi)|^2\right] \leq \left(1 + 2h\,L + h^2 L^2 + h\,L^2\right)|x - y|^2 .$$

(ii) Si mostri che, per $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|v(x) - v(y)| \leq \mathbf{E}\left[|\Psi(x,\xi) - \Psi(y,\xi)|\right] \leq \sqrt{\mathbf{E}\left[|\Psi(x,\xi) - \Psi(y,\xi)|^2\right]}.$$

(iii) Usando i punti precedenti si concluda che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|v(x) - v(y)| \leq \left(1 + 2\left(L + L^2\right) h\right) |x - y|\,.$$

Esercizio 3. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_{1000}$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con comune distribuzione di Bernoulli di parametro $1/500$. Poniamo

$$S(\omega) \doteq \sum_{i=1}^{1000} X_i(\omega),\ \omega \in \Omega, \qquad N \doteq \min\left\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{P}\left(S \leq n\right) \geq 0.98\right\}.$$

Sia dia una stima per N in tre modi diversi, usando

a) la disuguaglianza di Chebyshev;

b) l'approssimazione di Poisson;

c) l'approssimazione normale.

Esercizio 4. Per ogni $c > 1$ si trovino variabili aleatorie reali $X = X_c$ e $Y = Y_c$ tali che

$$\mathbf{P}\left(X \leq Y \leq c \cdot X\right) = 1, \quad \mathbf{E}\left[Y\right] = \sqrt{c}\,\mathbf{E}\left[X\right], \quad \mathbf{E}\left[Y^2\right] \neq c \cdot \mathbf{E}\left[X^2\right].$$

Contatto: M. Fischer (fischer@math.unipd.it)