Probabilità e Statistica 2016/17	Nome:
Prova scritta	Cognome:
29 giugno 2017	Matricola:

Di seguito, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ denota uno spazio di probabilità abbastanza "ricco" per supportare le variabili aleatorie specificate.

Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Nei seguenti tre casi si determinino media e varianza di X (se esistono):

(i) X è uniforme su $[4, 6]$;

(ii) X ha funzione di ripartizione F_X data da $F_X(x) \doteq (x^3/27) \cdot \mathbf{1}_{(0,3)}(x) + \mathbf{1}_{[3,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

(iii) $X = Y^2$ per una variabile aleatoria Y normale standard.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}$ un insieme al più numerabile. Siano X, Y, Z, ξ variabili aleatorie definite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con le seguenti proprietà:

- X, Y, Z sono a valori in $\mathcal{Z}$;
- ξ è di Bernoulli di parametro $1/2$;
- $\mathbf{P}(X < Y) = 1$;
- (X, Y), Z, ξ sono indipendenti.

Definiamo una variabile aleatoria M tramite

$$M(\omega) \doteq \begin{cases} Y(\omega) & \text{se } \xi(\omega) = 1, \\ X(\omega) & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \omega \in \Omega,$$

e introduciamo l'evento

$$A \doteq \{\xi = 1, M \geq Z\} \cup \{\xi = 0, M < Z\}.$$

(i) Si calcoli la probabilità di A in termini delle distribuzioni marginali di X, Y, Z.

(ii) Si mostri che $\mathbf{P}(A) \geq 1/2$.

(iii) Si mostri che $\mathbf{P}(A) > 1/2$ se $\mathbf{P}(Z = z) > 0$ per ogni $z \in \mathcal{Z}$.

Esercizio 3. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_{125}$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con comune distribuzione binomiale di parametri $(8, 1/200)$. Poniamo

$$S(\omega) \doteq \sum_{i=1}^{125} X_i(\omega),\ \omega \in \Omega, \qquad M \doteq \min\left\{m \in \mathbb{N} : \mathbf{P}(S \leq m) \geq 0.96\right\}.$$

Sia dia una stima per M in tre modi diversi, usando

a) la disuguaglianza di Chebyshev;

b) l'approssimazione di Poisson (legge dei piccoli numeri);

c) l'approssimazione normale.

Esercizio 4. Siano $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Si trovi una variabile aleatoria reale $X = X_{\mu,\sigma}$ con media $\mu \doteq \mathbf{E}[X]$ e varianza $\sigma^2 \doteq \mathbf{E}\left[(X-\mu)^2\right]$ finite tale che

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = 1.$$

Contatto: M. Fischer (fischer@math.unipd.it)