Probabilità e Statistica 2017/18, Foglio I

9 marzo 2018

Esercizio 1. Supponiamo di estrarre a caso cinque carte (una "mano") da un mazzo di carte da poker. Vi sono quindi 52 carte determinate dal loro seme (picche, fiore, quadro, cuore) e dal loro tipo ($2, \ldots, 10$, J, Q, K, A). Le carte dal seme picche o fiore sono nere, le altre rosse. Si calcolino le probabilità delle seguenti combinazioni di cinque carte :

(i) almeno due carte dello stesso tipo;

(ii) un poker ("four of a kind"): quattro carte dello stesso tipo e una quinta carta;

(iii) un full ("full house"): tre carte di un tipo e due carte di un altro tipo;

(iv) un full con una sola carta rossa.

Esercizio 2. Distribuiamo le 52 carte di un mazzo da poker tra quattro giocatori A, B, C, D; ogni giocatore riceve quindi 13 carte. Si calcoli la probabilità che A o B (o entrambi) abbiano almeno due assi.

Esercizio 3. Per le estrazioni da un'urna come viste a lezione, si dimostri l'equivalenza asintotica tra i due schemi di estrazione. Più precisamente, per ogni $N \in \mathbb{N}$ si consideri un'urna contenente N palline di cui M_N rosse e $N - M_N$ verdi. Siano $n, k \in \mathbb{N}$ fissati. Indichiamo con c_N la probabilità di ottenere esattamente k palline rosse in n estrazioni *con reinserimento* dall'urna di N palline, ed indichiamo con s_N la probabilità di ottenere esattamente k palline rosse in n estrazioni *senza reinserimento* dall'urna di N palline (a patto che $N \geq n$). Supponendo che il limite

$$\lim_{N\to\infty} \frac{M_N}{N} \doteq p \in (0,1)$$

esista, si mostri che

$$\lim_{N\to\infty} c_N = \lim_{N\to\infty} s_N = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Esercizio 4. Sia Ω un insieme non-vuoto, e sia $\mathcal{F}$ una σ-algebra in Ω. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ una successione tale che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ una successione arbitraria di elementi di Ω non necessariamente distinti. Definiamo una mappa $\mathbf{P}$ su $\mathcal{F}$ tramite

$$\mathbf{P}(A) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \delta_{x_n}(A), \quad A \in \mathcal{F},$$

ove δ_x indica la misura di Dirac concentrata in x, cioè

$$\delta_x(A) \doteq \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad A \in \mathcal{F}.$$

Si dimostri che $\mathbf{P}$ così definita è una misura di probabilità su $\mathcal{F}$.

Esercizio 5. Sia Ω un insieme non-vuoto, e sia $\mathcal{F}$ una σ-algebra in Ω.

(i) Sia $\tilde{\Omega}$ un sottoinsieme di Ω non-vuoto (non necessariamente $\tilde{\Omega} \in \mathcal{F}$). Poniamo
$$\tilde{\mathcal{F}} \doteq \left\{ A \cap \tilde{\Omega} : A \in \mathcal{F} \right\}.$$
Si mostri che allora $\tilde{\mathcal{F}}$ è una σ-algebra in $\tilde{\Omega}$.

(ii) Supponiamo ora che Ω sia un insieme finito con cardinalità $|\Omega| = n$. Si mostri che allora esiste $k \in \{1, \ldots, n\}$ tale che
$$|\mathcal{F}| = 2^k.$$
[Suggerimento: induzione su n usando il punto precedente.]

Esercizio 6. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità, e siano $B \in \mathcal{F}$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$. Si verifichino le seguenti implicazioni:

(i) Se $\mathbf{P}(A_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$.

(ii) Se $\mathbf{P}(A_n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.

(iii) Se $\mathbf{P}(B) = 0$, allora $\mathbf{P}(B \cap A) = 0$ per ogni $A \in \mathcal{F}$.

(iv) Se $\mathbf{P}(B) = 1$, allora $\mathbf{P}(B \cap A) = \mathbf{P}(A)$ per ogni $A \in \mathcal{F}$.

Esercizio 7. Siano Ω_1, Ω_2 due insiemi (non vuoti) al più numerabili. Poniamo $\Omega \doteq \Omega_1 \times \Omega_2$, e supponiamo di avere una misura di probabilità $\mathbf{P}$ su $\mathcal{P}(\Omega)$. Definiamo la funzione $Q\colon \mathcal{P}(\Omega_1) \to [0,1]$ tramite

$$Q(A) \doteq \mathbf{P}(A \times \Omega_2), \quad A \subset \Omega_1.$$

(i) Si dimostri che (Ω_1, Q) è uno spazio di probabilità discreto.

(ii) Sia dia un esempio per Ω_1, Ω_2, $\mathbf{P}$ in cui Ω_1, Ω_2 siano insiemi numerabili infiniti.

(iii) Supponiamo ora che Ω_1, Ω_2 siano insiemi finiti e $\mathbf{P}$ la probabilità uniforme. Si mostri che allora Q è la probabilità uniforme su Ω_1.

Esercizio 8. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità, e sia $B \in \mathcal{F}$ tale che $\mathbf{P}(B) > 0$. Poniamo

$$\mathbf{P}(A|B) \doteq \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Si verifichi che $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot|B))$ è uno spazio di probabilità. Inoltre, sia dia un esempio di uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ed eventi $A_1, A_2, B \in \mathcal{F}$ tali che $\mathbf{P}(B) > 0$, $\mathbf{P}(A_1|B) > \mathbf{P}(A_1)$ e $\mathbf{P}(A_2|B) < \mathbf{P}(A_2)$.

Esercizio 9. Nella situazione della vignetta vista a lezione ("conditional risk" di xkcd), si considerino gli eventi

$A \doteq$ "individuo muore colpito da un fulmine",

$B \doteq$ "individuo conosce la statistica sui morti causati da un colpo di fulmine".

Dalla vignetta si deduce che

$$\mathbf{Prb}(A) = 1/7 \cdot 10^{-6}, \qquad \mathbf{Prb}(A|B) = 1/6.$$

Si diano stime dall'alto e dal basso quanto più precise possibili per $\mathbf{Prb}(B)$, la probabilità dell'evento B.

Contatto: Markus Fischer (fischer@math.unipd.it)