Probabilità e Statistica 2017/18, Foglio II

23 marzo 2018 (aggiornato 28 marzo)

Esercizio 1. a) Sia A un insieme finito non-vuoto con $|A| = n$. Sia $r \in \mathbb{N}$, e siano $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}_0$ tali che $k_1 + \ldots + k_r = n$. Si mostri che il numero delle partizioni di A in esattamente r parti con rispettivamente $k_1, \ldots, k_r$ elementi è dato da

$$\frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!}.$$

b) Immaginiamo di disporre casualmente n oggetti in r cassetti. Siano $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}_0$ tali che $k_1 + \ldots + k_r = n$. Si calcoli la probabilità che k_1 oggetti finiscano nel primo cassetto, k_2 nel secondo,... e k_r nel r-esimo cassetto.

Esercizio 2. Si verifichi se esiste o meno uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con eventi $A, B, C \in \mathcal{F}$ tali che

$$\mathbf{P}(A) = \frac{5}{12}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(C) = \frac{1}{4},$$
$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(A|C) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(B|C) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 3. Sia $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una famiglia di eventi indipendenti in uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Si dimostrino le seguenti implicazioni:

(i) Se $\mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = 1$ per un $n \in \mathbb{N}$, allora esiste $k \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $\mathbf{P}(A_k) = 1$.

(ii) Se $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) = +\infty$, allora

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 4. Siano $(\Omega_1, \mathbf{P}_1)$, $(\Omega_1, \mathbf{P}_2)$ spazi di probabilità discreti (nota che $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ sono definite sullo stesso spazio campionario), e sia $\lambda \in [0, 1]$. Poniamo

$$\Omega \doteq \{0, 1\} \times \Omega_1,$$

e per $\omega = (\omega_0, \omega_1) \in \Omega$,

$$q(\omega) \doteq \begin{cases} \lambda \cdot \mathbf{P}_1(\{\omega_1\}) & \text{se } \omega_0 = 1, \\ (1 - \lambda) \cdot \mathbf{P}_2(\{\omega_1\}) & \text{se } \omega_0 = 0. \end{cases}$$

a) Si verifichi che q è una densità discreta su Ω.

b) Sia Q la misura di probabilità indotta da q. Sia $E \subseteq \Omega_1$. Si calcoli la probabilità rispetto a Q dell'evento

$$B = \{\omega \in \Omega : \omega_1 \in E\},$$

e si determini se gli eventi B e $A \doteq \{\omega \in \Omega : \omega_0 = 1\}$ sono indipendenti o meno.

Esercizio 5 (Esercizio 1.41 del libro)**.** "Si consideri il seguente modello di distribuzione dei figli nei nuclei familiari. La probabilità che un nucleo familiare scelto a caso abbia (esattamente) n figli, con $n \geq 0$, vale $e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, dove λ è un parametro fissato, e ciascun figlio è maschio con probabilità $1/2$, indipendentemente da tutti gli altri. Consideriamo l'evento

$$A_k \doteq \text{"il nucleo familiare scelto (a caso) ha esattamente } k \text{ figli maschi"},$$

per $k \in \mathbb{N}_0$. Si mostri che la probabilità di A_k è uguale a $e^{-\lambda/2}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}$."

Esercizio 6. Si dia un esempio di tre eventi A, B e R in uno spazio di probabilità discreto $(\Omega, \mathbf{P})$ tali che A e B non siano indipendenti rispetto a $\mathbf{P}$, ma lo siano rispetto alla misura di probabilità $\mathbf{P}(\,\cdot\,|R)$, la probabilità condizionale dato R.

Esercizio 7. Sia $p_0 \in (1/2, 1]$ fissato. Per $n \in \mathbb{N}$, siano $A_0^n, A_1^n, \ldots, A_n^n$ eventi in uno spazio di probabilità discreto $(\Omega_n, \mathbf{P}_n)$ tali che $(A_i^n)_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ formi una famiglia indipendente, $\mathbf{P}_n(A_0^n) = p_0$, mentre $\mathbf{P}_n(A_i^n) = 1/2$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. Definiamo funzioni $X_i^n : \Omega_n \to \{-1, 1\}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ ponendo

$$X_0^n(\omega) \doteq \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A_0^n, \\ -1 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \omega \in \Omega_n,$$

e, per $i \in \{1, \ldots, n\}$, procedendo tramite ricorsione:

$$X_i^n(\omega) \doteq \begin{cases} X_{i-1}^n(\omega) & \text{se } \omega \in A_i^n, \\ -X_{i-1}^n(\omega) & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \omega \in \Omega_n.$$

Poniamo infine

$$C_i^n \doteq \{\omega \in \Omega_n : X_i^n(\omega) = 1\}, \quad i \in \{0, \ldots, n\}.$$

a) Si calcoli $\mathbf{P}(C_i^n)$ per ogni $i \in \{0, \ldots, n\}$.

b) Si decida se gli eventi C_0^n e C_n^n sono indipendenti o meno.

c) Si calcoli il limite di $\mathbf{P}(C_n^n)$ per $n \to \infty$.

Contatto: Markus Fischer (fischer@math.unipd.it)