Probabilità e Statistica 2017/18, Foglio III

9 aprile 2018

Esercizio 1. Consideriamo l'esperimento del lancio di tre dadi regolari. Sia $\mathbf{P}$ la probabilità uniforme sullo spazio campionario $\Omega \doteq \{1, \ldots, 6\}^3$. Per $i \in \{1, 2, 3\}$ poniamo

$$X_i(\omega) \doteq \omega_i, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega.$$

Di conseguenza, X_i può essere vista come il punteggio segnato dal dado i-esimo. Poniamo inoltre

$$Y_1 \doteq (X_1, X_2), \qquad\qquad Y_2 \doteq (X_2, X_3).$$

a) Si mostri che le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3 sono indipendenti, e si trovino le loro distribuzioni.

b) Si mostri che Y_1, Y_2 *non* sono indipendenti.

c) Sia D la diagonale in $\{1, \ldots, 6\}^2$, cioè $D \doteq \{(i, i) : i \in \{1, \ldots, 6\}\}$. Si decida se gli eventi $\{Y_1 \in D\}$ e $\{Y_2 \in D\}$ sono indipendenti o meno (rispetto a $\mathbf{P}$).

Esercizio 2. Siano X, Y, ξ variabili aleatorie definite sullo stesso spazio di probabilità discreto $(\Omega, \mathbf{P})$. Supponiamo che X e Y siano a valori nello stesso insieme non-vuoto E, ξ a valori in $\{0, 1\}$ con distribuzione di Bernoulli di parametro $p \in [0, 1]$, e che ξ e (X, Y) siano indipendenti. Poniamo

$$Z(\omega) \doteq \begin{cases} X(\omega) & \text{se } \xi(\omega) = 1, \\ Y(\omega) & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \omega \in \Omega.$$

Si determini la distribuzione di Z in termini di $\mathbf{P}_X$, $\mathbf{P}_Y$, p.

Esercizio 3 (cf. Esempio 3.99 del libro)**.** Immaginiamo di avere un'urna con N palline numerate da 1 a N. Estraiamo le palline una dopo l'altra senza reinserimento, e indichiamo con X_i il numero dell'i-esima pallina estratta. Interpretiamo X_i, $i = 1, \ldots, N$, come variabili aleatorie a valori in $\{1, \ldots, N\}$ definite su un opportuno spazio di probabilità $(\Omega, \mathbf{P})$.

a) Si determini la distribuzione (congiunta) del vettore $(X_1, \ldots, X_N)$. Si determinino poi le distribuzioni (marginali) delle X_i.

b) Si mostri che, per ogni $(i, j) \in \{1, \ldots, N\}^2$, X_i e X_j *non* sono indipendenti.

c) Sia $\sigma \in S_N$ una permutazione di $\{1, \ldots, N\}$. Si mostri che allora $(X_1, \ldots, X_N)$ e $(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(N)})$ hanno la stessa distribuzione.

Esercizio 4. Siano X, Y variabili aleatorie reali definite su $(\Omega, \mathbf{P})$ discreto con distribuzione congiunta data dalla seguente tabella:

$p_{(X,Y)}(x,y)$	2	4	6	8
1	$\frac{0}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$
-3	$\frac{5}{64}$	$\frac{0}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{1}{64}$
5	$\frac{1}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{6}{64}$
-7	$\frac{2}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{8}{64}$	$\frac{11}{64}$

Si calcolino valor medio, varianza e covarianza di X e Y, e si decida se X e Y sono indipendenti o meno.

Esercizio 5. Sia X una variabile aleatoria reale definita su $(\Omega, \mathbf{P})$ discreto. Si dimostrino le seguenti implicazioni:

a) Se esiste $C \in (0, \infty)$ tale che $|X(\omega)| \leq C$ per $\mathbf{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$, allora X ammette valor medio finito e $-C \leq \mathbf{E}[X] \leq C$.

b) Se $X(\omega) \geq 0$ per $\mathbf{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$ e $\mathbf{E}[X] = 0$, allora $X(\omega) = 0$ per $\mathbf{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$.

Esercizio 6 (Esercizio 3.9 del libro)**.** Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Per $n \in \mathbb{N}$, sia X_n una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $\{1, \ldots, n\}$. Poniamo

$$m_n \doteq \mathbf{E}\left[f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right].$$

Si identifichi il limite

$$\lim_{n \to \infty} m_n.$$

Esercizio 7 (Esercizio 3.7 del libro)**.** Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{N}$ definita su $(\Omega, \mathbf{P})$ discreto, con densità discreta data da $p_X(x) \doteq \frac{c_\alpha}{x^{1+\alpha}}$, dove $\alpha \in (0, \infty)$ è un parametro fissato, e

$$\frac{1}{c_\alpha} = \sum_{y \in \mathbb{N}} \frac{1}{y^{1+\alpha}}.$$

Si determini per quali valori di $p \in (0, \infty)$ si ha $X \in L^p(\Omega, \mathbf{P})$.

Esercizio 8. Siano $X, Y, Z \in L^2(\Omega, \mathbf{P})$ variabili aleatorie reali indipendenti ed identicamente distribuite con varianza comune strettamente positiva e distribuzione comune simmetrica rispetto a zero, cioè $\mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(X = -x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (e analogamente per Y, Z). Siano $a, b, c \in (0, \infty)$ con $a < b < c$. Poniamo

$$\tilde{X} \doteq a \cdot X, \qquad \tilde{Y} \doteq b \cdot Y, \qquad \tilde{Z} \doteq c \cdot Z,$$

$$A \doteq \left\{\tilde{X} > \max\{\tilde{Y}, \tilde{Z}\}\right\}, \quad B \doteq \left\{\tilde{Y} > \max\{\tilde{X}, \tilde{Z}\}\right\}, \quad C \doteq \left\{\tilde{Z} > \max\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}\right\}.$$

Si decida quale dei tre eventi A, B, C ha maggiore probabilità (oppure se hanno la stessa probabilità tutti e tre).

Contatto: Markus Fischer (fischer@math.unipd.it)