Probabilità e Statistica 2017/18, Foglio IV

30 aprile 2018; aggiornato il 18 maggio

Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione binomiale di parametri $n \in \mathbb{N}$ e $p \in [0,1]$. Si calcolino i momenti terzo e quarto di X.

Esercizio 2 (Esercizio 3.22 del libro)**.** "Si sceglie 'a caso' un campione di 5 oggetti da un lotto di 100 di cui 10 sono difettosi per effettuare un controllo di qualità. Sia X il numero di oggetti difettosi contenuti nel campione. Si determini la densità discreta di X."

Esercizio 3. Sia $n \in \mathbb{N}$, e siano $X_1, \ldots, X_n$, ξ variabili aleatorie definite sullo stesso spazio di probabilità discreto $(\Omega, \mathbf{P})$. Supponiamo che $X_1, \ldots, X_n$ prendano valori nello stesso insieme non-vuoto E, che ξ sia uniformemente distribuita su S_n, il gruppo delle permutazioni di $\{1, \ldots, n\}$, e che ξ e $(X_1, \ldots, X_n)$ siano indipendenti (le variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_n$ non sono necessariamente indipendenti tra di loro). Per $i \in \{1, \ldots, n\}$ poniamo

$$Z_i(\omega) \doteq X_{\xi_\omega(i)}(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

ricordando che, per ogni $\omega \in \Omega$, ξ_ω è un elemento di S_n, cioè una funzione biunivoca da $\{1, \ldots, n\}$ in $\{1, \ldots, n\}$.

(i) Si mostri che per ogni scelta di $y_1, \ldots, y_n \in E$,

$$\mathbf{P}(Z_1 = y_1, \ldots, Z_n = y_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} \mathbf{P}\left(X_{\tau(1)} = y_1, \ldots, X_{\tau(n)} = y_n\right).$$

(ii) Si mostri che per ogni $\sigma \in S_n$, ogni scelta di $y_1, \ldots, y_n \in E$,

$$\mathbf{P}(Z_1 = y_1, \ldots, Z_n = y_n) = \mathbf{P}\left(Z_{\sigma(1)} = y_1, \ldots, Z_{\sigma(n)} = y_n\right),$$

e che quindi $\mathbf{P}_{(Z_1,\ldots,Z_n)} = \mathbf{P}_{(Z_{\sigma(1)},\ldots,Z_{\sigma(n)})}$ per ogni $\sigma \in S_n$.

Esercizio 4. Siano X, Y, Z variabili aleatorie reali su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Si mostrino le seguenti affermazioni.

a) Se $Z \geq 0$ $\mathbf{P}$-quasi certamente e $\mathbf{E}[Z] = 0$, allora $Z = 0$ $\mathbf{P}$-quasi certamente.

b) Se $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sono indipendenti ed identicamente distribuite, allora

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y) = \frac{1}{2}\mathbf{E}\left[(X-Y)^2\right].$$

Esercizio 5. Sia X una variabile aleatoria non-negativa definita su uno spazio di probabilità discreto $(\Omega, \mathbf{P})$ tale che, per un $\lambda > 0$, $\mathbf{E}\left[e^{\lambda X}\right] < \infty$.

a) Si mostri che X possiede momenti di ogni ordine, cioè $\mathbf{E}\left[X^k\right] < \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

b) Si mostri che esiste una costante $K \in (0, \infty)$ tale che

$$\mathbf{P}\left(X \geq c\right) \leq K \cdot e^{-\lambda c} \text{ per ogni } c > 0.$$

[Suggerimento: disuguaglianza di Markov-Chebyshev.]

Esercizio 6. Siano $X, Y \in L^2(\Omega, \mathbf{P})$ tali che $\mathrm{var}(X) > 0$. Si dimostri che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}\left[\left(Y - (a \cdot X + b)\right)^2\right] \geq \mathrm{var}(Y)\left(1 - \rho(X,Y)^2\right),$$

dove $\rho(X, Y)$ indica il coefficiente di correlazione tra X e Y.

Suggerimento: Si definisca una funzione $\phi \colon \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ mediante

$$\phi(a, b) \doteq \mathbf{E}\left[\left(Y - (a \cdot X + b)\right)^2\right],$$

e si mostri che il minimo di ϕ viene assunto in (a_*, b_*) con

$$a_* = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{var}(X)}, \qquad b_* = \mathbf{E}\left[Y\right] - \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{var}(X)}\,\mathbf{E}\left[X\right].$$

Contatto: Markus Fischer (fischer@math.unipd.it)