Probabilità e Statistica 2017/18, Foglio V

27 maggio 2018

Esercizio 1. Siano X, Y, Z, ξ variabili aleatorie definite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con le seguenti proprietà:

- X, Y, Z sono a valori in $\mathbb{Z}$;
- ξ è di Bernoulli di parametro $1/2$;
- $\mathbf{P}(X < Y) = 1$;
- (X, Y), Z, ξ sono indipendenti.

Definiamo una variabile aleatoria M tramite

$$M(\omega) \doteq \begin{cases} Y(\omega) & \text{se } \xi(\omega) = 1, \\ X(\omega) & \text{altrimenti}, \end{cases} \qquad \omega \in \Omega,$$

e introduciamo l'evento

$$A \doteq \{\xi = 1, M \geq Z\} \cup \{\xi = 0, M < Z\}.$$

(i) Si calcoli la probabilità di A in termini delle distribuzioni marginali di X, Y, Z.

(ii) Si mostri che $\mathbf{P}(A) \geq 1/2$.

(iii) Si mostri che $\mathbf{P}(A) > 1/2$ se $\mathbf{P}(Z = k) > 0$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Nei seguenti tre casi si determinino media e varianza di X (se esistono in $\mathbb{R}$):

(i) X è uniforme su $[1, 2]$;

(ii) X ha funzione di ripartizione F_X data da $F_X(x) \doteq x^3 \cdot \mathbf{1}_{[0,1)}(x) + \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

(iii) $X = \exp(Z)$ per una variabile aleatoria Z esponenziale di parametro uno.

Esercizio 3. Sia X una variabile aleatoria reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Poniamo

$$Y(\omega) \doteq \sqrt{X(\omega)}, \quad \omega \in \Omega.$$

Si calcoli la funzione di ripartizione di Y e si decida se Y è assolutamente continua o meno.

Esercizio 4 (Esercizio 6.7 del libro)**.** Sia X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $(-\pi/2, \pi/2)$. Poniamo $Y \doteq \cos(X)$. Si mostri che Y è assolutamente continua e se ne determini la densità.

Esercizio 5 (Esercizio 6.8 del libro)**.** "Sia X un punto scelto uniformemente nell'intervallo $[0, 2]$. Qual è la probabilità che il triangolo equilatero di lato X abbia area maggiore di 1?"

Esercizio 6 (Esercizio 6.11 del libro)**.** Sia X una variabile aleatoria reale con distribuzione uniforme su $(-1, 1)$. Poniamo $Y \doteq X^+ = \max\{0, X\}$. Si determini la funzione di ripartizione di Y e si deduca che Y non è né discreta né assolutamente continua.

Esercizio 7 (Esercizio 7.8 del libro)**.** "Un congegno è costituito da una componente elettrica che viene rimpiazzata non appena smette di funzionare. Dunque, se $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sono i tempi di vita di n componenti che si hanno a disposizione, il tempo di vita totale del congegno è $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$. Si supponga che $T_i \sim \mathrm{Exp}(1)$, e che le T_i siano indipendenti. Utilizzando l'approssimazione normale, si calcolino:

(i) se $n = 100$ la probabilità $\mathbf{P}(T < 90)$;

(ii) il valore minimo di n per cui $\mathbf{P}(T < 90) \leq 0.05$."

Esercizio 8 (Esercizio 7.10 del libro)**.** "In una elezione votano un milione di persone, che devono scegliere tra i due candidati A e B. Il voto di un certo numero n di elettori è sotto il controllo di una organizzazione malavitosa, che garantische che essi votino per il candidato A. Tutti gli altri elettori votano "a caso", scegliendo con ugual probabilità i due candidati, ognuno indipendentemente dagli altri.

(i) Supponiamo che l'organizzazione malavitosa controlli $n = 2000$ voti. Qual è la probabilità (approssimata) che il candidato A vinca le elezioni?

(ii) Qual è il numero minimo n di individui che l'organizzazione malavitosa deve controllare per garantire che la probabilità di vittoria di A sia almeno del 99%?"

Esercizio 9 (Esercizio 7.11 del libro)**.** Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione comune $\mathrm{Unif}[-1, 1]$. Si determini per ogni $t \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{(X_1 + \ldots X_n)^2}{n} > t\right).$$

Esercizio 10. Sia $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ una funzione di ripartizione (cioè F non-decrescente e continua a destra con $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$). Sia $D \subset \mathbb{R}$ l'insieme dei punti di discontinuità di F:

$$D \doteq \{x \in \mathbb{R} : F(x) \neq F(x-)\}.$$

[Ricordiamo che il limite a sinistra $F(x-) \doteq \lim_{h\to 0+} F(x-h)$ esiste per ogni $x \in \mathbb{R}$ poiché F è limitata e monotona per ipotesi.]

Si trovi una successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di *densità discrete* su $\mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R} \setminus D,$$

ove F_n è la funzione di ripartizione associata a p_n, cioè

$$F_n(x) \doteq \sum_{y\in\mathbb{R}: y\leq x} p_n(y), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si consideri per primo il caso particolare in cui F è la funzione di ripartizione della distribuzione uniforme su $(0, 1)$.

Contatto: Markus Fischer (fischer@math.unipd.it)