

*Ringrazio tutto il team di Analisi Numerica dell'Università di Parma: il Prof. Mauro Diligenti, la Dott.ssa Alessandra Aimi, la Dott.ssa Chiara Guardasoni. In particolare, devo un sincero ringraziamento alla mia relattrice che, oltre ad essersi prodigata in ogni situazione per fornirmi consigli e spiegazioni circa la realizzazione di questa tesi, mi ha di fatto seguito per entrambi gli anni della Laurea Specialistica ed è il docente che, ultimamente, ha maggiormente contribuito a formarmi e a motivarmi in ambito matematico. Un ringraziamento speciale anche a Chiara, per tutta la pazienza e la disponibilità che ha sempre avuto nei miei confronti, soprattutto durante il lavoro a suo fianco.*

*Ringrazio la mia famiglia: mio padre Francesco, mia madre Orestina, mio fratello Paolo, per ogni tipo di sostegno che mi hanno assicurato in tutti questi anni.*

*Ringrazio Marco, con cui ho avuto la gioia e il piacere di condividere i momenti più importanti e significativi di questi anni di vita e di studio.*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Equazione delle onde e sua formulazione integrale</b>	<b>1</b>
1.1 L'equazione delle onde nel caso bidimensionale . . . . .	1
1.2 Problemi differenziali associati . . . . .	4
1.3 Soluzione fondamentale . . . . .	6
1.4 Formule di rappresentazione integrale . . . . .	9
1.5 Equazioni integrali di contorno . . . . .	15
1.6 Risultati di esistenza ed unicit� . . . . .	20
<b>2 Formulazione debole e discretizzazione</b>	<b>23</b>
2.1 Formulazione debole energetica . . . . .	23
2.2 Discretizzazione . . . . .	26
2.3 Costruzione della matrice . . . . .	28
2.4 Integrazione numerica . . . . .	33
<b>3 Multidomini</b>	<b>51</b>
3.1 Descrizione del problema . . . . .	51
3.2 Equazioni integrali per multidomini . . . . .	54
3.2.1 Il caso del bidominio . . . . .	54
3.2.2 Il caso del tridominio . . . . .	60
3.2.3 Generalizzazione . . . . .	66
3.3 Formulazione debole e discretizzazione . . . . .	67
<b>4 Esempi Numerici</b>	<b>75</b>
4.1 Problema misto interno . . . . .	75
4.1.1 Il caso di un monodominio . . . . .	75
4.1.2 Il caso di un bidominio . . . . .	76
4.1.3 Il caso di un tridominio . . . . .	85
4.2 Problema di Neumann esterno . . . . .	88
4.2.1 Il caso di un monodominio . . . . .	88
4.2.2 Il caso di un bidominio . . . . .	89
4.2.3 Il caso di un bidominio non simmetrico . . . . .	91

4.2.4	Il caso di un tridominio . . . . .	93
	<b>Appendice</b>	<b>95</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>117</b>

# Introduzione

I problemi dipendenti dal tempo sono oggetto di studio in molti settori della matematica applicata e dell'ingegneria. Spesso tali problemi sono modellati da equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo iperbolico, corredate da condizioni iniziali e da condizioni al bordo.

Tuttavia non è sempre possibile disporre della soluzione esatta in forma chiusa per i modelli matematici che descrivono tali problemi (e che ne rappresentano in genere già una semplificazione). Da qui nasce l'esigenza di calcolare una soluzione approssimata. L'Analisi Numerica può utilizzare molteplici strumenti per raggiungere questo scopo, pertanto una soluzione approssimata del problema differenziale in questione è frutto di una serie di scelte ben precise [16].

Una prima decisione da prendere riguarda il problema analitico sul quale operare: in particolare distinguiamo tra metodi che trattano direttamente il problema formulato mediante equazioni alle derivate parziali, fra i quali ricordiamo il classico metodo di Galerkin agli elementi finiti (*FEM*, *Finite Element Method*), e metodi che trattano una qualche riformulazione delle equazioni differenziali originarie. Nel nostro caso, considereremo la riscrittura del problema mediante *equazioni integrali di contorno* (*BIE*, *Boundary Integral Equation*) ottenute a partire dalla conoscenza analitica della soluzione fondamentale dell'operatore differenziale e dall'impiego di formule di rappresentazione che esprimono la soluzione del problema in esame attraverso integrali definiti sulla superficie laterale del dominio spazio-temporale del problema originario.

Per un assegnato problema differenziale si possono considerare varie equazioni integrali, tipicamente ricavate da diverse formule di rappresentazione con un opportuno procedimento di passaggio al limite per la variabile spaziale che tende al bordo del dominio. Una seconda scelta da compiere, ancora a livello analitico, riguarda dunque il tipo di equazione integrale da trattare.

Successivamente, si deve fissare un metodo numerico con cui discretizzare le BIEs, fra le numerose tecniche oggi a disposizione. Qui ricordiamo, in generale, i metodi agli elementi di contorno (*BEM*, *Boundary Element Method*) per collocazione e di Galerkin. Entrambi sono basati sulla considerazione di spazi funzionali finito-dimensionali in cui ricercare la soluzione approssimata; la scelta di tali spazi implica la scelta di una mesh per la suddivisione del

contorno del problema, del grado locale delle funzioni polinomiali di base e della regolarità globale della soluzione approssimata.

Per quanto riguarda il metodo di collocazione, bisogna fissare inoltre un insieme di nodi nei quali collocare il problema discretizzato. Per operare con il metodo di Galerkin bisogna invece fissare una adeguata formulazione debole del problema integrale in questione, attraverso la scelta di una forma bilineare che possieda buone proprietà teoretiche [40].

Infine, è possibile riformulare algebricamente il problema originario: la soluzione numerica è determinata dal vettore dei coefficienti delle funzioni di base, che risolve il sistema lineare associato al problema discretizzato. L'ultima scelta da effettuare è pertanto quella di un metodo efficiente per la risoluzione del sistema lineare, che tenga conto della struttura della matrice associata.

Di fronte a tutte le possibilità che si presentano, è necessaria dunque una attenta valutazione dei pregi e dei difetti dei vari approcci.

Ad esempio, la scelta di utilizzare il metodo BEM (e dunque di operare su una BIE) piuttosto che il metodo FEM (che agisce sulla formulazione debole del problema differenziale originario), offre i seguenti vantaggi [15]:

- vengono ridotte le dimensioni spaziali del dominio del problema;
- in particolare, quando vengono analizzati problemi definiti all'esterno di una regione finita, il dominio illimitato viene ridotto ad un contorno limitato;
- dal punto di vista computazionale, viene ridotta l'area di memoria necessaria per l'inserimento dei dati relativi alla discretizzazione spaziale;
- nei problemi di propagazione ondosa le condizioni di radiazione all'infinito sono imposte in modo semplice e naturale, senza bisogno di introdurre ulteriori bordi fittizi;
- quando si vuole conoscere la soluzione in un determinato punto non è necessario calcolarla in tutti i punti del dominio, ma basta operare attraverso la fase di *post-processing*. Inoltre, in parecchie applicazioni, i valori più significativi sono quelli che assumono la soluzione o la sua derivata normale sul bordo del problema in questione e tali valori sono ottenuti direttamente dalla risoluzione della BIE considerata.

Tuttavia il metodo BEM, rispetto al metodo FEM, presenta i seguenti svantaggi:

- bisogna disporre della soluzione fondamentale analitica associata all'operatore differenziale del problema originario. Con le conoscenze attuali si possono trattare solo equazioni lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti oppure particolari tipi di coefficienti variabili.

Questo limita decisamente la tipologia di equazioni accessibili mediante il metodo BEM;

- la matrice associata al problema discretizzato è solitamente densa, mentre le matrici provenienti dalla discretizzazione mediante metodo FEM, con la scelta di funzioni di base Lagrangiane, sono fortemente sparse;
- il numero di integrali da eseguire per scrivere ogni elemento della matrice è doppio rispetto a quello necessario nel caso di discretizzazione mediante FEM.

Per porre rimedio al secondo svantaggio è possibile utilizzare algoritmi recentemente proposti in letteratura per la risoluzione veloce dei sistemi lineari provenienti dalla fase di discretizzazione. Per ovviare all'ultimo svantaggio bisogna invece sperimentare efficienti ed accurati schemi di integrazione per integrali multipli.

Inoltre, le equazioni che si prestano ad una favorevole trattazione mediante operatori integrali di contorno sono quelle omogenee corredate da condizioni iniziali omogenee e il cui dominio è indipendente dal tempo. In questo modo, infatti, gli integrali che compaiono nelle BIEs sono esclusivamente definiti su contorni.

Per quanto riguarda l'applicazione del metodo BEM a modelli iperbolici, in letteratura sono presenti sostanzialmente due approcci [17]:

- il primo utilizza *trasformazioni di Laplace-Fourier* rispetto alla variabile temporale e risolve un problema integrale nel cosiddetto *dominio delle frequenze*. L'equazione differenziale iperbolica viene trasformata nell'equazione di Helmholtz, che viene risolta numericamente applicando un classico metodo BEM per problemi ellittici. Per trovare infine la soluzione nel dominio temporale, vengono utilizzate speciali tecniche numeriche di inversione della trasformata di Laplace-Fourier.
- il secondo, più attuale, consiste nell'operare direttamente nel *dominio spazio-tempo*. La proposta più immediata è quella di considerare tecniche di collocazione [23] ma, come evidenziato in letteratura, i risultati numerici possono essere affetti da fenomeni di elevata instabilità. Un altro classico approccio nel dominio spazio-temporale deriva dal considerare la *formulazione debole  $L^2$* , ottenuta moltiplicando scalarmente entrambi i membri delle equazioni integrali per funzioni test appartenenti agli stessi spazi funzionali delle soluzioni approssimate. Tuttavia, sia nel caso di problemi monodimensionali [4], che nel caso di problemi bidimensionali [12], tale metodo può risultare fortemente instabile. In questo ambito, il metodo più robusto, a livello teorico, risulta essere quello proposto da Bamberger-Ha Duong in [10], [11] e

[25], per il quale sono stati dimostrati risultati di stabilità e convergenza. Gli unici difetti dipendono dal fatto che la formulazione debole da cui discende la fase di discretizzazione è definita tramite un integrale su un intervallo temporale illimitato e le costanti di stabilità crescono esponenzialmente nel tempo.

Recentemente è stata proposta in letteratura la *formulazione debole energetica* [4], [5], così chiamata perchè ottenuta a partire da alcune immediate osservazioni sull'identità dell'energia.

A livello teorico, sotto opportune ipotesi e attraverso un'analisi mediante trasformata di Fourier, sono state studiate le proprietà di coercività della forma bilineare associata alla formulazione debole energetica nel caso di problemi di Dirichlet [5] e di Neumann [8]. I risultati numerici ottenuti per problemi sia interni che esterni con condizioni al contorno di tipo Dirichlet, Neumann, misto, applicando il cosiddetto metodo di Galerkin energetico agli elementi di contorno convalidano l'adeguatezza di questo approccio.

L'obbiettivo di questa tesi è quello di estendere i risultati ottenuti tramite l'approccio energetico nello studio della equazione delle onde bidimensionale definita su singoli domini, al caso di multidomini (domini non globalmente omogenei ma costituiti da zone localmente omogenee). I problemi definiti su multidomini modellano numerose applicazioni: fra le più interessanti ed importanti ricordiamo lo studio della propagazione delle onde in terreni costituiti da diversi strati geofisici.

La tesi è articolata in quattro capitoli. Nel primo capitolo si considera un singolo dominio: viene scritta l'equazione delle onde bidimensionale, con particolare attenzione al significato fisico dei coefficienti che vi compaiono e sono brevemente presentati i problemi differenziali trattati. Viene ricavata analiticamente la soluzione fondamentale per l'equazione delle onde bidimensionale e vengono scritte formule di rappresentazione per la soluzione del problema differenziale. A partire da queste ultime, vengono dedotti diversi tipi di equazioni integrali di contorno per problemi con condizioni al bordo di Dirichlet, Neumann e miste.

Nel capitolo successivo viene presentata la formulazione debole energetica e vengono fissati gli spazi funzionali per l'approssimazione delle funzioni ignote sul contorno. Viene indagata poi la struttura della matrice associata al problema discretizzato e viene descritta la procedura del time-marching per una efficiente risoluzione del sistema lineare. Infine vengono presentati alcuni schemi di integrazione numerica utilizzati per il calcolo degli elementi matriciali.

Nel terzo capitolo si generalizzano le considerazioni precedenti al caso dei multidomini. Dopo una descrizione generale del problema, vengono sviluppati in particolare i passaggi per ricavare le equazioni integrali di contorno per casi notevoli di bidominio e tridominio. Viene descritta la fase di formu-

lazione debole e discretizzazione, prestando attenzione alla struttura a blocchi della matrice del sistema lineare finale associato al problema integrale. Nell'ultimo capitolo vengono presentati i risultati numerici ottenuti per problemi interni ed esterni, definiti su bidomini e tridomini, facendo, ove possibile, confronti con la letteratura esistente. In appendice è riportata una selezione di listati di programma in linguaggio Fortran appositamente creati per l'implementazione del metodo energetico di Galerkin agli elementi di contorno.



# Capitolo 1

## Equazione delle onde e sua formulazione integrale

In questo capitolo scriveremo l'equazione delle onde per un corpo elastico bidimensionale, indagando il significato fisico delle quantità che vi compaiono.

Introdurremo anche i problemi differenziali con condizioni iniziali e al contorno legati all'equazione delle onde, riportando risultati di esistenza ed unicità per le soluzioni.

Percorreremo quindi tutte le tappe che portano alla formulazione integrale dei suddetti problemi: ricaveremo la soluzione fondamentale dell'equazione delle onde e dimostreremo le formule di rappresentazione integrale. Da qui, tenendo conto delle relazioni di salto soddisfatte dagli operatori integrali, giungeremo a scrivere le equazioni integrali di contorno. Riporteremo infine alcuni risultati di esistenza ed unicità per le soluzioni dei problemi integrali.

### 1.1 L'equazione delle onde nel caso bidimensionale

Ricaveremo l'equazione delle onde per domini bidimensionali, utilizzando la terminologia e gli strumenti propri della Meccanica, in accordo con quanto proposto in [24], [35] e [38].

Precisiamo innanzitutto le ipotesi fisiche alla base della successiva descrizione. Consideriamo una membrana  $\Omega$ , cioè una porzione piana di un corpo elastico avente due dimensioni (precisamente lunghezza e larghezza) molto più elevate rispetto alla rimanente (spessore), che può pertanto essere trascurata. Supponiamo che tale membrana sia perfettamente flessibile (ovvero che non offra alcuna resistenza alla flessione) ed omogenea (ovvero che la sua densità superficiale sia costante in spazio e tempo).

Supponiamo inoltre che il moto sia caratterizzato da piccole deformazioni perpendicolari al piano su cui giace la membrana, nel senso che gli spostamenti dalla posizione di equilibrio orizzontale sono piccoli rispetto alle di-

mensioni del problema. Con le notazioni usuali, sia  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  la terna di versori degli assi del sistema di riferimento cartesiano. Le coordinate  $x$  ed  $y$  sono associate alle prime due direzioni, mentre lo spostamento verticale della membrana è dato dalla funzione  $u(x, y, t)$ , dove  $t$  è la variabile temporale (assumiamo che  $u$  sia sufficientemente regolare, in modo da poter operare in ambito classico).

Se il bordo  $\Gamma$  della membrana è una curva regolare, in ogni suo punto sono definiti il versore normale  $\mathbf{m}$  (uscente), tangente  $\mathbf{t}$  e binormale  $\mathbf{n}$  che costituiscono un sistema ortogonale locale (triedro di Frenet); essi sono legati dal prodotto vettoriale  $\mathbf{m} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ .

Supponiamo che *tensione*, la tensione della membrana che agisce nella direzione  $\mathbf{m}$ , mantenga modulo costante durante il moto e sia isotropica, cioè indipendente dalla direzione considerata. Supponiamo infine che non vi siano attriti.

Sotto queste ipotesi, la forza che agisce puntualmente sul contorno della membrana è data da

$$\mathbf{R} = T_m \mathbf{m},$$

la cui componente verticale è espressa da

$$\mathbf{R}_v = \mathbf{R} \cdot \mathbf{k} = T_m (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{k}.$$

Sfruttando una nota proprietà vettoriale riscriviamo il secondo membro nella forma

$$\mathbf{R}_v = \mathbf{R} \cdot \mathbf{k} = T_m (\mathbf{n} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{t}.$$

Se denotiamo con  $P(x, y, t)$  la pressione perpendicolare alla membrana e con  $\rho$  la densità superficiale della membrana, possiamo scrivere la legge di conservazione del momento lineare

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dS = \int_{\Omega} P(x, y, t) dS + T_m \oint_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{t} d\gamma,$$

dove  $dS$  è un elemento infinitesimo di superficie nel piano  $(x, y)$  e  $d\gamma$  è un arco infinitesimo lungo  $\Gamma$ .

Applichiamo il *teorema di Stokes* per convertire l'integrale curvilineo in integrale di superficie

$$\oint_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{t} d\gamma = \int_{\Omega} [\nabla \times (\mathbf{n} \times \mathbf{k})] \cdot \mathbf{n} dS$$

ottenendo

$$\int_{\Omega} \left[ \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - P(x, y, t) \right] dS = T_m \int_{\Omega} [\nabla \times (\mathbf{n} \times \mathbf{k})] \cdot \mathbf{n} dS$$

oppure, equivalentemente,

$$\int_{\Omega} \left[ \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - P(x, y, t) - T_m [\nabla \times (\mathbf{n} \times \mathbf{k})] \cdot \mathbf{n} \right] dS = 0.$$

Grazie al *lemma di Dubois-Reymond* [18] si ha che la funzione integranda deve essere nulla. Pertanto, dall'uguaglianza precedente si ricava

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - P(x, y, t) = T_m [\nabla \times (\mathbf{n} \times \mathbf{k})] \cdot \mathbf{n}. \quad (1.1.1)$$

Esprimiamo il versore  $\mathbf{n}$  che, essendo normale alla superficie  $z = u(x, y, t)$ , è parallelo a

$$\nabla(z - u(x, y, t)) = \left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right) \mathbf{i} + \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Pertanto

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right) \mathbf{i} + \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathbf{j} + \mathbf{k}. \quad (1.1.2)$$

Da qui, ricordando che  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ ,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{k} = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

e quindi

$$\nabla \times (\mathbf{n} \times \mathbf{k}) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (\Delta u)\mathbf{k}, \quad (1.1.3)$$

dove  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  è l'operatore di Laplace bidimensionale espresso in coordinate cartesiane.

Utilizzando la (1.1.2) e la (1.1.3) possiamo calcolare

$$[\nabla \times (\mathbf{n} \times \mathbf{k})] \cdot \mathbf{n} = (\Delta u)\mathbf{k} \cdot \left[\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right) \mathbf{i} + \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathbf{j} + \mathbf{k}\right] = \Delta u.$$

Sostituendo infine nella (1.1.1) otteniamo l'equazione

$$T_m \Delta u(x, y, t) + P(x, y, t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t).$$

Dividendo entrambi i membri per  $\rho$  si giunge alla forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) - \frac{T_m}{\rho} \Delta u(x, y, t) = \frac{P(x, y, t)}{\rho}. \quad (1.1.4)$$

Soffermiamoci ad analizzare le dimensioni fisiche (denotate come di consueto con  $L$ -lunghezza,  $M$ -massa,  $T$ -tempo) delle costanti che compaiono nell'equazione:

$$\begin{aligned} [T_m] &= M L T^{-2} / L, \\ [\rho] &= M / L^2. \end{aligned}$$

Il rapporto  $T_m/\rho$  ha pertanto le dimensioni di una *velocità* al quadrato, che indicheremo con  $c^2$ . Sostituendo tale scrittura il (1.1.4) si ottiene l'usuale forma dell'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.5)$$

oppure, equivalentemente,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t), \quad (1.1.6)$$

dove, per brevità, si è posto  $\mathbf{x} = (x, y)$  e si sono indicate con  $f(\mathbf{x}, t)$  e  $h(\mathbf{x}, t)$  rispettivamente le funzioni  $P(\mathbf{x}, t)/\rho$  e  $P(\mathbf{x}, t)/T_m$ .

Notiamo infine che le costanti  $T_m$ ,  $\rho$ ,  $c$  dipendono dalle caratteristiche fisiche del dominio considerato.

L'equazione delle onde compare in numerosi contesti fisici, ad esempio si parla di onde elastiche, onde acustiche, onde elettromagnetiche; il suo studio trova svariate applicazioni nei settori dell'ingegneria civile, dei trasporti, delle comunicazioni e biomedica. Nel seguito ci riferiremo tipicamente ad onde che si propagano in mezzi elastici bidimensionali.

## 1.2 Problemi differenziali associati

Nel seguito tratteremo problemi differenziali legati all'equazione delle onde. Un requisito essenziale è che essi siano ben posti (nel senso di Hadamard), cioè che esista un'unica soluzione che dipenda con continuità dai dati del problema.

Pertanto l'equazione è corredata da *condizioni iniziali* e da *condizioni al contorno*.

Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$  con bordo  $\Gamma$  compatto e regolare e sia  $T > 0$  un fissato istante temporale. Definiamo il cilindro spazio-temporale  $Q_T := \Omega \times [0, T]$ . Indichiamo con  $\Sigma_T$  la sua superficie laterale, cioè  $\Sigma_T = \Gamma \times [0, T]$ .

Per quanto riguarda le condizioni iniziali, poiché le derivate temporali compaiono fino al secondo ordine, vengono assegnati  $u$  e  $\partial u/\partial t$  (spostamento e velocità) all'istante 0, ovvero si considera il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t) & (\mathbf{x}, t) \in Q_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Gli spazi funzionali citati nel seguito sono quelli che vengono tipicamente coinvolti quando si trattano problemi dipendenti dal tempo. Si veda [33],

[35] per una loro formale definizione. Vale il seguente teorema di esistenza ed unicità:

**Teorema 1.2.1.** [33] *Siano  $H$  e  $V$  due spazi di Hilbert separabili,  $V \subset H$  con immersione densa e continua. Siano  $h \in L^1((0, T), H)$ ,  $u_0 \in V$ ,  $v_0 \in H$ . Allora esiste un'unica soluzione debole  $u \in C^0([0, T], V) \cap C^1([0, T], H)$  del problema di evoluzione (1.2.1).*

Per quanto riguarda le condizioni al contorno consideriamo i seguenti casi

- **Problema di Dirichlet**

Sul bordo è assegnata una condizione sullo spostamento  $u$ . Pertanto (1.2.1) si presenta nella forma

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t) & (\mathbf{x}, t) \in Q_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\mathbf{x}, t) = \bar{u}(\mathbf{x}, t) & (\mathbf{x}, t) \in \Sigma_T. \end{array} \right. \quad (1.2.2)$$

Riportiamo un risultato di esistenza ed unicità nel caso in cui  $\bar{u} \equiv 0$  (condizione di Dirichlet omogenea).

**Teorema 1.2.2.** [35] *Siano  $h \in L^2([0, T], L^2(\Omega))$ ,  $u_0(\mathbf{x}) \in H_0^1(\Omega)$  e  $v_0(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega)$ . Allora  $u \in L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$  è l'unica soluzione del problema (1.2.2).*

- **Problema di Neumann**

Sul bordo è assegnata una condizione sulla derivata normale dello spostamento (indicata brevemente con  $\partial_n$ ). Pertanto si presenta nella forma

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t) & (\mathbf{x}, t) \in Q_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ p(\mathbf{x}, t) := T_m \partial_n u(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(\mathbf{x}, t) & (\mathbf{x}, t) \in \Sigma_T, \end{array} \right. \quad (1.2.3)$$

dove  $T_m$  è la stessa costante che compare in (1.1.4), ovvero è interpretata fisicamente come tensione.

La scelta di considerare la derivata normale dello spostamento pre-moltiplicata per  $T_m$  è in accordo con [3] e [4].

- **Problema Misto**

Vengono assegnate su una porzione del bordo (*bordo di Dirichlet*, denotato con  $\Gamma_u$ ) una condizione su  $u$  mentre sulla rimanente (*bordo di Neumann*, denotato con  $\Gamma_p$ ) una condizione su  $\partial_n u$ .

Più rigorosamente, sia  $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_p$ , con  $\Gamma_u \cap \Gamma_p = \emptyset$ . Allora il problema si presenta come

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t) & (\mathbf{x}, t) \in Q_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\mathbf{x}, t) = \bar{u}(\mathbf{x}, t) & (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_u \times [0, T] =: \Sigma_T^u \\ p(\mathbf{x}, t) := T_m \partial_n u(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(\mathbf{x}, t) & (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_p \times [0, T] =: \Sigma_T^p. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

In letteratura sono presenti risultati di esistenza ed unicità anche per problemi di Neumann e problemi misti. Tuttavia il contesto funzionale in cui si opera è assai più complesso e pertanto rimandiamo alla bibliografia di [22].

### 1.3 Soluzione fondamentale

Come accennato in precedenza, la conoscenza analitica della soluzione fondamentale è un requisito irrinunciabile per la scrittura di equazioni integrali. In questo paragrafo svilupperemo i calcoli necessari per trovare la soluzione fondamentale dell'equazione delle onde nel caso bidimensionale.

Per definizione essa è la distribuzione che risolve il problema

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(x, \chi, y, \eta, t, \tau) - \Delta G(x, \chi, y, \eta, t, \tau) = \delta(x - \chi)\delta(y - \eta)\delta(t - \tau) \\ G(x, \chi, y, \eta, 0, \tau) = \frac{\partial G}{\partial t}(x, \chi, y, \eta, 0, \tau) = 0, \end{cases}$$

dove  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  e con  $\delta$  si è indicata la distribuzione di Dirac centrata rispettivamente nell'ascissa  $\chi$ , nell'ordinata  $\eta$  e nell'istante temporale  $\tau > 0$ . Fisicamente stiamo di fatto considerando un impulso unitario che agisce nel punto sorgente  $\xi = (\chi, \eta)$  al tempo  $\tau$ .

Equivalentemente, risolviamo l'equazione

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(x - \chi)\delta(y - \eta)\delta(t - \tau). \quad (1.3.1)$$

Sviluppando i passaggi descritti in [20], eseguiamo la trasformata di Laplace rispetto al tempo, denotata con

$$\hat{g}(x, y, s) = \mathcal{L}[G(x, y, t)] = \int_0^{+\infty} G(x, y, t)e^{-st} dt, \quad \text{Re}(s) > 0.$$

L'equazione trasformata diventa

$$\frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \left[ s^2 \hat{g}(x, y, s) - sG(x, y, 0) - \frac{\partial G}{\partial t}(x, y, 0) \right] = -\delta(x-\chi)\delta(y-\eta)e^{-\tau s}.$$

Poiché le condizioni iniziali sono nulle quanto appena scritto si riduce a

$$\frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial y^2} - \frac{s^2}{c^2} \hat{g}(x, y, s) = -\delta(x-\chi)\delta(y-\eta)e^{-\tau s}.$$

Procediamo con la trasformata di Fourier rispetto alla variabile spaziale  $x$ , dentata con

$$g(k, y, s) = \mathcal{F}[\hat{g}(x, y, s)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(x, y, s) e^{-ikx} dx.$$

In questo modo

$$(ik)^2 g(k, y, s) + \frac{d^2 g}{dy^2}(k, y, s) - \frac{s^2}{c^2} g(k, y, s) = -e^{-ik\chi} e^{-\tau s} \delta(y-\eta).$$

Sostituiamo  $k = \alpha s$

$$\frac{d^2 g}{dy^2}(\alpha, y, s) - s^2 \left( \alpha^2 + \frac{1}{c^2} \right) g(\alpha, y, s) = -e^{-i\alpha s \chi} e^{-\tau s} \delta(y-\eta).$$

Sia  $\beta = \beta(\alpha) = \left( \alpha^2 + \frac{1}{c^2} \right)^{1/2}$ . Trattandosi di variabili complesse, scegliamo il ramo della funzione con  $\text{Re}(\beta) \geq 0$ .

In definitiva l'equazione risulta

$$\frac{d^2 g}{dy^2}(\alpha, y, s) - s^2 \beta^2 g(\alpha, y, s) = -e^{-i\alpha s \chi} e^{-\tau s} \delta(y-\eta). \quad (1.3.2)$$

La soluzione di (1.3.2), per  $y \neq \eta$ , che si mantiene limitata per  $|y-\eta| \rightarrow \infty$ , è data da

$$g(\alpha, y, s) = \frac{1}{2s\beta} e^{-i\alpha s \chi - s\beta|y-\eta| - s\tau}.$$

A questo punto iniziamo col calcolare l'antitrasformata di Fourier

$$\begin{aligned} \hat{g}(x, y, s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2s\beta} e^{-i\alpha s \chi - s\beta|y-\eta| - s\tau} e^{i\alpha s x} d(\alpha s) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\beta} e^{i\alpha s(x-\chi) - s\beta|y-\eta| - s\tau} d\alpha. \end{aligned}$$

Sostituendo  $\alpha = iw$  si ottiene

$$\hat{g}(x, y, s) = \frac{e^{-s\tau}}{4\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{-s[w(x-\chi) + \beta|y-\eta|]}}{\beta} dw, \quad (1.3.3)$$

dove, con questo cambiamento di variabile,  $\beta = \beta(w) = \left(\frac{1}{c^2} - w^2\right)^{1/2}$ , sempre con  $\text{Re}(\beta) \geq 0$ .

La procedura standard richiederebbe di calcolare questo integrale e di eseguirne l'antitrasformata di Laplace.

Noi utilizzeremo invece quella che in letteratura è nota come *tecnica di Cagniard-de Hoop* (si confronti [19] e [21]). Essa consiste sostanzialmente nel trovare un opportuno cambiamento di variabile per l'integrale (1.3.3), in modo che quest'ultimo rappresenti la trasformata di Laplace di una funzione reale. Tale funzione è banalmente la soluzione fondamentale cercata.

Nel nostro caso dovremo però prestare particolare attenzione in quanto vi sono punti di ramificazione (*branch points*) per  $w = \pm 1/c$ . Per garantire inoltre che  $\text{Re}(\beta) > 0$  introduciamo delle sezioni (*branch cuts*) lungo l'asse reale per  $1/c \leq |\text{Re}(w)| \leq \infty$ .

Scegliamo quindi come nuova variabile

$$t = w(x - \chi) + \beta|y - \eta|, \quad (1.3.4)$$

al variare di  $w$  nel piano complesso in modo che  $t$  risulti reale e positivo. Invertendo tale trasformazione e ricordando che  $\beta = \beta(w)$  otteniamo che

$$w = \frac{(x - \chi)t}{r^2} \pm i \frac{|y - \eta|}{r^2} \sqrt{t^2 - r^2/c^2}, \quad (1.3.5)$$

per  $r/c < t < \infty$ , dove  $r = \sqrt{(x - \chi)^2 + (y - \eta)^2} = \|\mathbf{x} - \xi\|_2$  è la distanza euclidea del punto  $\mathbf{x}$  dal punto  $\xi$ .

Lungo tale curva si ha

$$\beta = \frac{|y - \eta|t}{r^2} \mp i \frac{x - \chi}{r^2} \sqrt{t^2 - r^2/c^2} \quad (1.3.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \pm \frac{i\beta}{\sqrt{t^2 - r^2/c^2}}. \quad (1.3.7)$$

Utilizzando il teorema di Cauchy, il lemma di Jordan e la simmetria del cammino di integrazione, l'integrale (1.3.3) diventa

$$\begin{aligned} \widehat{g}(x, y, s) &= \frac{1}{2\pi} e^{-s\tau} \int_{r/c}^{+\infty} \frac{e^{-st}}{\sqrt{t^2 - r^2/c^2}} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-s\tau} \int_0^{+\infty} \frac{H[t - r/c]}{\sqrt{t^2 - r^2/c^2}} e^{-st} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-s\tau} \mathcal{L} \left[ \frac{H[t - r/c]}{\sqrt{t^2 - r^2/c^2}} \right], \end{aligned}$$

dove  $H[\cdot]$  è la funzione a gradino di Heaviside. Applicando il teorema del ritardo (*second shifting theorem*) per la trasformata di Laplace, vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} e^{-s\tau} \mathcal{L} \left[ \frac{H[t - r/c]}{\sqrt{t^2 - r^2/c^2}} \right] &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{L} \left[ \frac{H[t - \tau] H[t - \tau - r/c]}{\sqrt{(t - \tau)^2 - r^2/c^2}} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{L} \left[ \frac{H[t - \tau - r/c]}{\sqrt{(t - \tau)^2 - r^2/c^2}} \right], \end{aligned}$$

da cui discende che

$$G(r, t, \tau) = \frac{c}{2\pi} \frac{H[c(t - \tau) - r]}{\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - r^2}} \quad (1.3.8)$$

è la soluzione fondamentale per l'operatore delle onde nel caso bidimensionale.

Osserviamo che l'espressione della  $G$  è caratterizzata dalla presenza della funzione di Heaviside. Per questo motivo, quando successivamente ricaveremo la formula di rappresentazione integrale per la soluzione  $u(\mathbf{x}, t)$  dell'equazione delle onde, gli integrali temporali si estenderanno dal tempo iniziale 0 al tempo  $t - r/c$  (detto *ritardo*).

Fisicamente ciò significa che una forza concentrata nel punto  $\xi$  influisce sul punto  $\mathbf{x}$  al tempo  $t$  per tutti gli istanti precedenti al valore del ritardo  $\tau = t - r/c$ .

Inoltre, nella fase finale di risoluzione numerica del sistema lineare associato al problema discretizzato, tale forma della soluzione fondamentale ci permetterà di applicare lo schema del time-marching [14].

## 1.4 Formule di rappresentazione integrale

Consideriamo il problema di Cauchy (1.2.1), dove, in generale, l'equazione delle onde è non omogenea e le condizioni iniziali sono non nulle.

Moltiplichiamo ambo i membri per la soluzione fondamentale (1.3.8) e integriamo su  $Q_T$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi, \tau) G(r, t, \tau) d\omega_{\xi} d\tau - \int_0^t \int_{\Omega} \Delta_{\xi} u(\xi, \tau) G(r, t, \tau) d\omega_{\xi} d\tau = \\ = \int_0^t \int_{\Omega} h(\xi, \tau) G(r, t, \tau) d\omega_{\xi} d\tau. \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

D'ora in avanti, per alleggerire i passaggi, scriveremo  $u$  al posto di  $u(\xi, \tau)$  e  $G$  al posto di  $G(r, t, \tau)$ , quando ciò non crei ambiguità.

Inizialmente consideriamo solo il primo membro. Integriamo per parti due

volte rispetto al tempo il primo addendo ottenendo

$$\frac{1}{c^2} \int_0^t \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} d\omega_{\xi} d\tau - \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta_{\xi} u) G d\omega_{\xi} d\tau + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \tau} G d\omega_{\xi} \Big|_0^t - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} u \frac{\partial G}{\partial \tau} d\omega_{\xi} \Big|_0^t. \quad (1.4.2)$$

A questo punto dobbiamo osservare che, direttamente dalla espressione della soluzione fondamentale  $G$ ,

$$\begin{aligned} G(r, t, t) &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial \tau}(r, t, t) &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial t} &= -\frac{\partial G}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

Ricordando le condizioni iniziali la (1.4.2) diventa

$$\frac{1}{c^2} \int_0^t \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} d\omega_{\xi} d\tau - \int_0^t \int_{\Omega} \Delta_{\xi} u G d\omega_{\xi} d\tau - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} v_0(\xi) G d\omega_{\xi} - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} u_0(\xi) \frac{\partial G}{\partial t} d\omega_{\xi}.$$

Sostituendo nella (1.4.1) si ha

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c^2} \int_0^t \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} d\omega_{\xi} d\tau - \int_0^t \int_{\Omega} \Delta_{\xi} u G d\omega_{\xi} d\tau = \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} h G d\omega_{\xi} d\tau + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} v_0(\xi) G d\omega_{\xi} + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} u_0(\xi) \frac{\partial G}{\partial t} d\omega_{\xi}. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

A questo punto dobbiamo applicare la seconda formula di Green, che ricaviamo direttamente dal

**Teorema 1.4.1. (Integrazione per parti)** [15]

*Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un aperto limitato con bordo  $\Gamma$  differenziabile a tratti. Sia  $n = (n_1, \dots, n_N)$  il versore normale uscente da  $\Gamma$ , che esiste per tutti i punti, eccetto al più un numero finito. Siano  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$  due funzioni sufficientemente regolari (ad esempio  $\bar{f}, \bar{g} \in H^1(\Omega)$ ). Allora vale la formula*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \bar{g}(\mathbf{x}) d\omega_{\mathbf{x}} = \int_{\Gamma} \bar{f}(\mathbf{x}) \bar{g}(\mathbf{x}) n_i d\gamma_{\mathbf{x}} - \int_{\Omega} \bar{f}(\mathbf{x}) \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_i} d\omega_{\mathbf{x}}, \quad (1.4.4)$$

dove  $d\omega_{\mathbf{x}}$  è una misura su  $\Omega$  e  $d\gamma_{\mathbf{x}}$  è una misura su  $\Gamma$ .

In particolare, fissato un arbitrario  $i \in 1, \dots, N$ , scegliamo dapprima  $\bar{f} = \partial f / \partial x_i$  e  $\bar{g} = g$ , dove  $f, g$  sono due funzioni sufficientemente regolari. In questo modo, la (1.4.4) diventa

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\omega_{\mathbf{x}} = \int_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) n_i g(\mathbf{x}) d\gamma_{\mathbf{x}} - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial g}{\partial x_i} d\omega_{\mathbf{x}}.$$

Sommando su  $i$  si ha

$$\int_{\Omega} (\Delta f(\mathbf{x})) g(\mathbf{x}) d\omega_{\mathbf{x}} = \int_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial n}(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\gamma_{\mathbf{x}} - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\omega_{\mathbf{x}}. \quad (1.4.5)$$

Analogamente, scambiando dapprima i ruoli di  $f$  e  $g$ , i.e. ponendo  $\bar{f} = \partial g / \partial x_i$  e  $\bar{g} = f$ , sommando poi su  $i$ , la (1.4.4) diventa

$$\int_{\Omega} (\Delta g(\mathbf{x})) f(\mathbf{x}) d\omega_{\mathbf{x}} = \int_{\Gamma} \frac{\partial g}{\partial n}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\gamma_{\mathbf{x}} - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\omega_{\mathbf{x}}. \quad (1.4.6)$$

Sottraendo membro a membro la (1.4.5) e la (1.4.6) otteniamo la **seconda formula di Green**

$$\int_{\Omega} [(\Delta f)g - f(\Delta g)] d\omega_{\mathbf{x}} = \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial f}{\partial n} g - f \frac{\partial g}{\partial n} \right] d\gamma_{\mathbf{x}}. \quad (1.4.7)$$

A questo punto bisogna distinguere tra *problemi interni* e *problemi esterni*. Nel primo caso si ha  $\mathbf{x} \in \Omega =: \Omega^i$ , mentre nel secondo caso si ha  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega =: \Omega^e$ . Tale distinzione è necessaria perché, a seconda del tipo di problema trattato, il verso della normale uscente da uno stesso punto del bordo  $\Gamma$  è opposto. Senza perdere generalità, continueremo la nostra trattazione considerando problemi interni; per ottenere lo stesso risultato per problemi esterni basterà effettuare opportuni cambi di segno. Riprendiamo quindi la (1.4.3). Aggiungiamo e togliamo a primo membro l'integrale

$$\int_0^t \int_{\Omega^i} u \Delta_{\xi} G d\omega_{\xi} d\tau.$$

Supponendo che siano verificate le ipotesi del teorema precedente, applichiamo la seconda formula di Green e otteniamo

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Gamma} \left[ u \frac{\partial G}{\partial n_{\xi}} - G \frac{\partial u}{\partial n_{\xi}} \right] d\gamma_{\xi} d\tau + \int_0^t \int_{\Omega^i} u \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - \Delta_{\xi} G \right] d\omega_{\xi} d\tau = \\ & = \int_0^t \int_{\Omega^i} h G d\omega_{\xi} d\tau + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega^i} v_0(\xi) G d\omega_{\xi} + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega^i} u_0(\xi) \frac{\partial G}{\partial t} d\omega_{\xi}. \end{aligned}$$

Ricordando che  $G$  è soluzione fondamentale possiamo scrivere

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Gamma} \left[ u \frac{\partial G}{\partial n_{\xi}} - G \frac{\partial u}{\partial n_{\xi}} \right] d\gamma_{\xi} d\tau + \int_0^t \int_{\Omega^i} u \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) d\omega_{\xi} d\tau = \\ & = \int_0^t \int_{\Omega^i} h G d\omega_{\xi} d\tau + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega^i} v_0(\xi) G d\omega_{\xi} + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega^i} u_0(\xi) \frac{\partial G}{\partial t} d\omega_{\xi}. \end{aligned}$$

e quindi, dalle proprietà della delta di Dirac

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Gamma} \left[ u \frac{\partial G}{\partial n_{\xi}} - G \frac{\partial u}{\partial n_{\xi}} \right] d\gamma_{\xi} d\tau + u(t, \mathbf{x}) &= \\ &= \int_0^t \int_{\Omega^i} hG d\omega_{\xi} d\tau + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega^i} v_0(\xi) G d\omega_{\xi} + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega^i} u_0(\xi) \frac{\partial G}{\partial t} d\omega_{\xi}. \end{aligned}$$

Riorganizzando la precedente uguaglianza otteniamo la formula di rappresentazione della soluzione di (1.2.1) per **problemi interni**

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \int_{\Gamma} G \frac{\partial u}{\partial n_{\xi}} d\gamma_{\xi} d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma} u \frac{\partial G}{\partial n_{\xi}} d\gamma_{\xi} d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega^i} hG d\omega_{\xi} d\tau + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega^i} v_0(\xi) G d\omega_{\xi} + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega^i} u_0(\xi) \frac{\partial G}{\partial t} d\omega_{\xi}, \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

dove  $\mathbf{x} \in \Omega^i$ ,  $t \in [0, T]$ .

Nel caso particolare in cui l'equazione è omogenea e le condizioni iniziali sono nulle, la formula di rappresentazione si riduce a

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} G \frac{\partial u}{\partial n_{\xi}} d\gamma_{\xi} d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_{\xi}} u d\gamma_{\xi} d\tau, \quad (1.4.9)$$

dove  $\mathbf{x} \in \Omega^i$ ,  $t \in [0, T]$ .

Per **problemi esterni** si ha invece, nel caso generale,

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= - \int_0^t \int_{\Gamma} G \frac{\partial u}{\partial n_{\xi}} d\gamma_{\xi} d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma} u \frac{\partial G}{\partial n_{\xi}} d\gamma_{\xi} d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega^e} hG d\omega_{\xi} d\tau + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega^e} v_0(\xi) G d\omega_{\xi} + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega^e} u_0(\xi) \frac{\partial G}{\partial t} d\omega_{\xi}, \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

e, per equazione omogenea con condizioni iniziali nulle,

$$u(\mathbf{x}, t) = - \int_0^t \int_{\Gamma} G \frac{\partial u}{\partial n_{\xi}} d\gamma_{\xi} d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_{\xi}} u d\gamma_{\xi} d\tau, \quad (1.4.11)$$

dove  $\mathbf{x} \in \Omega^e$ ,  $t \in [0, T]$ .

Osserviamo che tali formule di rappresentazione permettono di calcolare la soluzione  $u$  in un qualunque punto  $(\mathbf{x}, t)$  del dominio  $Q_T$ , una volta note  $u$  e  $\partial_n u$  sul contorno  $\Sigma_T$ ; pertanto esse sono utilizzate per ricavare le equazioni integrali di contorno aventi come incognite  $u$  e  $\partial_n u$  e per eseguire il *post-processing* della soluzione numerica ottenuta.

Nel seguito tratteremo esclusivamente il caso in cui l'equazione è omogenea e le condizioni iniziali sono nulle. Ci poniamo dunque in una situazione ottimale, in quanto gli integrali sull'intero dominio  $\Omega$  (potenziali di volume)

sono nulli. Se così non fosse, al fine di calcolare numericamente tali integrali, dovremmo considerare una discretizzazione di  $\Omega$  e così facendo perderemmo uno dei fondamentali vantaggi della formulazione del problema mediante equazioni integrali di contorno: la riduzione della dimensione del dominio (si confronti [17]).

Introduciamo alcuni operatori di cui ci serviremo per esprimere in maniera più concisa le formule di rappresentazione (1.4.9) e (1.4.11). Le notazioni sono quelle derivate dal caso ellittico ed utilizzate, ad esempio, in [6] e [22]. Definiamo

$$(\mathcal{V}\psi)(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} G(r, t, \tau) \psi(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau \quad (1.4.12)$$

**potenziale di singolo strato** e

$$(\mathcal{K}\psi)(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_{\xi}}(r, t, \tau) \psi(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau \quad (1.4.13)$$

**potenziale di doppio strato.**

Introduciamo anche alcune definizioni che riguardano la funzione integranda di entrambi gli operatori: la funzione  $\psi$  viene detta *densità*, mentre la soluzione fondamentale  $G$  e la sua derivata normale costituiscono il *nucleo*. Con le precedenti notazioni la (1.4.9) può essere riscritta come

$$u = (\mathcal{V}\partial_{n_{\xi}}u) - (\mathcal{K}u) \quad (1.4.14)$$

mentre la (1.4.11) può essere riscritta come

$$u = -(\mathcal{V}\partial_{n_{\xi}}u) + (\mathcal{K}u). \quad (1.4.15)$$

A partire dalla (1.4.9) possiamo ricavare una formula di rappresentazione anche per le derivate direzionali dello spostamento  $u$ . Sia  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  una generica direzione del piano; indicheremo con  $\partial_{\mathbf{a}}u$  la derivata direzionale di  $u(\mathbf{x}, t)$  nella direzione  $\mathbf{a}$ , definita da  $\partial_{\mathbf{a}}u(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{a}$ .

Deriviamo in direzione  $\mathbf{a}$  entrambi i membri della (1.4.9) ottenendo

$$\partial_{\mathbf{a}}u(\mathbf{x}, t) = \partial_{\mathbf{a}} \int_0^t \int_{\Gamma} G(\xi, \tau) \frac{\partial u}{\partial n_{\xi}}(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau - \partial_{\mathbf{a}} \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_{\xi}}(\xi, \tau) u(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau, \quad (1.4.16)$$

per  $\mathbf{x} \in \Omega^i$ ,  $t \in [0, T]$  e

$$\partial_{\mathbf{a}}u(\mathbf{x}, t) = -\partial_{\mathbf{a}} \int_0^t \int_{\Gamma} G(\xi, \tau) \frac{\partial u}{\partial n_{\xi}}(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau + \partial_{\mathbf{a}} \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_{\xi}}(\xi, \tau) u(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau, \quad (1.4.17)$$

per  $\mathbf{x} \in \Omega^e$ ,  $t \in [0, T]$ .

Utilizzando le notazioni (1.4.12) e (1.4.13) possiamo riscrivere la (1.4.16) come

$$\partial_{\mathbf{a}}u = \partial_{\mathbf{a}}(\mathcal{V}\partial_{n_{\xi}}u) - \partial_{\mathbf{a}}(\mathcal{K}u) \quad (1.4.18)$$

e la (1.4.17) come

$$\partial_{\mathbf{a}}u = -\partial_{\mathbf{a}}(\mathcal{V}\partial_{n_{\xi}}u) + \partial_{\mathbf{a}}(\mathcal{K}u) \quad (1.4.19)$$

**Osservazione.** A partire da (1.4.9) e (1.4.11) e facendo intervenire il *salto* (spaziale) di una funzione  $v(\mathbf{x})$  attraverso il bordo  $\Gamma$ , definito come

$$[v(\mathbf{x})]_{\Gamma} := v|_{\Omega^i}(\mathbf{x}) - v|_{\Omega^e}(\mathbf{x}), \quad (1.4.20)$$

possiamo scrivere la seguente formula di rappresentazione *unificata* [13], valida sia per problemi esterni che interni

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} G(r, t, \tau) \left[ \frac{\partial u}{\partial n_{\xi}}(\xi, \tau) \right]_{\Gamma} d\gamma_{\xi} d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_{\xi}}(r, t, \tau) [u(\xi, \tau)]_{\Gamma} d\gamma_{\xi} d\tau, \quad (1.4.21)$$

dove  $\mathbf{x} \in (\Omega^e \cup \Omega^i)$ ,  $t \in [0, T]$ .

Equivalentemente, con le notazioni appena introdotte, scriviamo

$$u = \mathcal{V}[\partial_{n_{\xi}}u] - \mathcal{K}[u]. \quad (1.4.22)$$

Viceversa, a partire dalla (1.4.21) ed assumendo  $u|_{\Omega^e} = \partial_n u|_{\Omega^e} = 0$  si riottiene la (1.4.9) per problemi interni; assumendo invece  $u|_{\Omega^i} = \partial_n u|_{\Omega^i} = 0$  si riottiene la (1.4.11) per problemi esterni.

Infine, rifacendoci sempre alla (1.4.21), ci accorgiamo che essa lascia ampia libertà di scelta per considerare altre formule di rappresentazione integrale per la soluzione  $u(\mathbf{x}, t)$  del problema differenziale (1.2.1).

Ad esempio, se supponiamo  $[u]_{\Gamma} = 0$ , cioè se  $u$  è continua attraverso  $\Gamma$ , rimane

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} G \left[ \frac{\partial u}{\partial n_{\xi}} \right]_{\Gamma} d\gamma_{\xi} d\tau,$$

ovvero

$$u = \mathcal{V}\psi, \quad (1.4.23)$$

nota in letteratura come formula di rappresentazione di *strato singolo*.

Se supponiamo invece  $[\partial_n u]_{\Gamma} = 0$ , cioè se  $\partial_n u$  è continua attraverso  $\Gamma$ , rimane

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_{\xi}} [u]_{\Gamma} d\xi d\tau,$$

ovvero

$$u = \mathcal{K}\omega, \quad (1.4.24)$$

nota in letteratura come formula di rappresentazione di *doppio strato*. Nella precedente equazione il salto è stato definito come  $[u]_{\Gamma} := u|_{\Omega^e} - u|_{\Omega^i}$ .

Osserviamo che, in queste ultime formule di rappresentazione, i potenziali non sono più direttamente espressi attraverso lo spostamento e la sua derivata normale, ma piuttosto mediante funzioni che hanno il significato fisico di salto di  $u$  e di  $\partial_n u$  attraverso  $\Gamma$ .

## 1.5 Equazioni integrali di contorno

Introduciamo ora le equazioni integrali di contorno (*BIE, Boundary Integral Equations*), seguendo sostanzialmente l'approccio di [17]. In generale esse sono ottenute a partire dalle formule di rappresentazione sopra ricavate, quando la variabile spaziale  $\mathbf{x}$  tende al bordo  $\Gamma$  dal dominio  $\Omega$ .

Nel seguito, dovendo distinguere tra domini interni e domini esterni, utilizzeremo la notazione  $\Gamma^-$  per indicare che  $\mathbf{x}$  tende al bordo dall'interno, ovvero dal dominio  $\Omega^i$ ; utilizzeremo la notazione  $\Gamma^+$  per indicare che  $\mathbf{x}$  tende al bordo dall'esterno, ovvero dal dominio  $\Omega^e$ . Per quanto riguarda le formule (1.4.18) e (1.4.19), al posto di una generica direzione  $\mathbf{a}$  del piano considereremo la normale uscente da  $\Gamma$ . Eseguiremo quindi la derivata normale, indicata con  $\partial_{n_{\mathbf{x}}}$ .

Per problemi di Dirichlet e di Neumann è tipicamente possibile formulare quattro diverse equazioni integrali di contorno, corrispondenti alle quattro formule di rappresentazione (1.4.14),(1.4.18),(1.4.23),(1.4.24) per problemi interni e (1.4.15),(1.4.19),(1.4.23),(1.4.24) per problemi esterni.

Passando al limite bisogna tenere conto delle eventuali discontinuità che presentano gli operatori integrali precedentemente introdotti (le cosiddette *relazioni di salto su  $\Gamma$* )

$$\begin{aligned} [\mathcal{V}\psi]_{\Gamma} &= 0 \\ [\mathcal{K}\psi]_{\Gamma} &= \psi \\ [\partial_{n_{\mathbf{x}}}\mathcal{V}\psi]_{\Gamma} &= -\psi \\ [\partial_{n_{\mathbf{x}}}\mathcal{K}\psi]_{\Gamma} &= 0. \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

Risulta quindi naturale definire nel seguente modo gli *operatori integrali di contorno*

$$\begin{aligned} V &:= \mathcal{V}|_{\Gamma} \\ K &:= 1/2 (\mathcal{K}|_{\Gamma^+} + \mathcal{K}|_{\Gamma^-}) \\ K' &:= 1/2 (\partial_{n_{\mathbf{x}}}\mathcal{V}|_{\Gamma^+} + \partial_{n_{\mathbf{x}}}\mathcal{V}|_{\Gamma^-}) \\ D &:= \partial_{n_{\mathbf{x}}}\mathcal{K}|_{\Gamma}. \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Grazie a quanto fino ad ora osservato, di seguito elenchiamo in modo schematico le BIE opportunamente formulate per ciascun tipo di problema.

## ■ PROBLEMA DI DIRICHLET

□ PROBLEMA INTERNO

Dato:  $u|_{\Gamma} = \bar{u}$ ; incognite sul bordo:  $\partial_n u|_{\Gamma^-}$ ,  $\psi$ ,  $\omega$ .

$$\left(-\frac{1}{2} + K'\right) \partial_n u = D\bar{u} \quad (\text{Di1})$$

$$V\partial_n u = \left(K + \frac{1}{2}\right) \bar{u} \quad (\text{Di2})$$

$$V\psi = \bar{u} \quad (\text{Di3})$$

$$\left(\frac{1}{2} - K\right) \omega = \bar{u} \quad (\text{Di4}).$$

□ PROBLEMA ESTERNO

Dato:  $u|_{\Gamma} = \bar{u}$ ; incognite sul bordo:  $\partial_n u|_{\Gamma^+}$ ,  $\psi$ ,  $\omega$ .

$$\left(\frac{1}{2} + K'\right) \partial_n u = D\bar{u} \quad (\text{De1})$$

$$V\partial_n u = \left(K - \frac{1}{2}\right) \bar{u} \quad (\text{De2})$$

$$V\psi = -\bar{u} \quad (\text{De3})$$

$$\left(\frac{1}{2} + K\right) \omega = \bar{u} \quad (\text{De4}).$$

## ■ PROBLEMA DI NEUMANN

□ PROBLEMA INTERNO

Dato:  $\partial_n u|_{\Gamma} = \bar{p}$ ; incognite sul bordo:  $u|_{\Gamma^-}$ ,  $\psi$ ,  $\omega$ .

$$Du = \left(-\frac{1}{2} + K'\right) \bar{p} \quad (\text{Ni1})$$

$$\left(K + \frac{1}{2}\right) u = V\bar{p} \quad (\text{Ni2})$$

$$\left(\frac{1}{2} + K'\right) \psi = \bar{p} \quad (\text{Ni3})$$

$$D\omega = -\bar{p} \quad (\text{Ni4}).$$

□ PROBLEMA ESTERNO

Dato:  $\partial_n u|_{\Gamma} = \bar{p}$ ; incognite sul bordo:  $u|_{\Gamma^+}$ ,  $\psi$ ,  $\omega$ .

$$Du = \left(\frac{1}{2} + K'\right) \bar{p} \quad (\text{Ne1})$$

$$\left(K - \frac{1}{2}\right) u = V\bar{p} \quad (\text{Ne2})$$

$$\left(\frac{1}{2} - K'\right) \psi = \bar{p} \quad (\text{Ne3})$$

$$D\omega = \bar{p} \quad (\text{Ne4}).$$

Al fine di classificare le equazioni sopra elencate, introduciamo alcune definizioni proprie della teoria delle equazioni integrali di contorno [40].

Una equazione integrale di contorno si dice *diretta* quando le incognite che vi compaiono sono funzioni di immediato interesse nell'ambito del problema considerato, nel nostro caso la funzione  $u$  e la sua derivata normale. Si dice invece *indiretta* quando le incognite non sono di immediato interesse, nel nostro caso il salto di  $u$  e di  $\partial_n u$  attraverso il bordo  $\Gamma$ .

Osserviamo che, in generale, le BIE dirette provengono da formule di rappresentazione basate sulle formule di Green (nel nostro caso la seconda) mentre quelle indirette provengono da formule di rappresentazione basate su potenziali di singolo e doppio strato.

Una equazione integrale di contorno è di *prima specie* (*first kind*) se la funzione incognita compare esclusivamente sotto il segno di integrale; altrimenti si dice di *seconda specie* (*second kind*).

Riferendoci all'elenco precedente, osserviamo una certa simmetria fra le equazioni. Infatti, delle quattro proposte per ogni problema, quelle indicate con i numeri

- # 1, 2 sono dirette,
- # 3, 4 sono indirette,
- # 1, 4 sono di prima specie,
- # 2, 3 sono di seconda specie.

Consideriamo infine il

#### ■ PROBLEMA MISTO

In questo caso è necessario distinguere tra bordo di Dirichlet e bordo di Neumann. Nel seguito prenderemo in considerazione solo la formulazione diretta. Più precisamente:

##### □ PROBLEMA INTERNO

Facendo riferimento a (1.2.4), sono assegnate  $u|_{\Gamma_u} = \bar{u}$  e  $\partial_n u|_{\Gamma_p} = \bar{p}$ . Pertanto le incognite sono lo spostamento  $u|_{\Gamma_p^-}$  sul bordo di Neumann e la sua derivata normale  $\partial_n u|_{\Gamma_u^-}$  sul bordo di Dirichlet.

Poiché ora le incognite sono due, dovremo risolvere un sistema di BIEs, in cui la prima equazione è ottenuta a partire dalla (1.4.9) considerando  $\mathbf{x} \rightarrow \Gamma_u^-$  e la seconda equazione è ottenuta a partire dalla (1.4.16) considerando  $\mathbf{x} \rightarrow \Gamma_p^-$ .

Formalmente scriviamo

$$\begin{cases} V\partial_{n_\xi} u - Ku & = \frac{1}{2}\bar{u} \\ -K'\partial_{n_\xi} u + Du & = -\frac{1}{2}\bar{p}. \end{cases} \quad (\mathcal{M}i)$$

Abbiamo cambiato segno alla seconda equazione per ragioni di simmetria che saranno più evidenti nella fase di discretizzazione.

##### □ PROBLEMA ESTERNO

Si procede in maniera analoga al caso del problema interno. Le incognite sono  $u|_{\Gamma_p^+}$  e  $\partial_n u|_{\Gamma_u^+}$ .

$$\begin{cases} -V\partial_{n_\xi} u + Ku & = \frac{1}{2}\bar{u} \\ K'\partial_{n_\xi} u - Du & = -\frac{1}{2}\bar{p}. \end{cases} \quad (\mathcal{M}e)$$

Nel seguito della nostra trattazione teorica ci concentreremo sui problemi misti interni (per quelli esterni è sufficiente operare con i cambiamenti di segno già illustrati). Questo sostanzialmente per due ragioni: innanzitutto nel sistema di BIEs compaiono tutti e quattro gli operatori integrali prima introdotti. Inoltre da un problema misto, supponendo che  $\Gamma_p = \emptyset$ , se ne ottiene uno di Dirichlet e, supponendo che  $\Gamma_u = \emptyset$ , se ne ottiene uno di Neumann.

Scriviamo in modo esteso le equazioni  $(\mathcal{M}i)$ . Ricordando che  $\Gamma = \bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_p$  e sfruttando la proprietà di spezzamento degli integrali, la prima equazione diventa

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Gamma_u} G(r, t, \tau) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p} G(r, t, \tau) \bar{p}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau \\ & - \int_0^t \int_{\Gamma_u} \frac{\partial G}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) \bar{u}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_p} \frac{\partial G}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = \\ & = \frac{1}{2} \bar{u}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

e la seconda

$$\begin{aligned} & - \int_0^t \int_{\Gamma_u} \frac{\partial G}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_p} \frac{\partial G}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) \bar{p}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Gamma_u} \frac{\partial^2 G}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) \bar{u}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p} \frac{\partial^2 G}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = \\ & = -\frac{1}{2} \bar{p}(x, t). \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Lasciando a primo membro le funzioni incognite e portando a secondo membro i dati, il sistema  $(\mathcal{M}i)$  risulta

$$\begin{cases} \int_0^t \int_{\Gamma_u} G(r, t, \tau) p(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_p} \frac{\partial G}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = f_u(x, t) \\ - \int_0^t \int_{\Gamma_u} \frac{\partial G}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p} \frac{\partial^2 G}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = f_p(x, t) \end{cases} \quad (1.5.7)$$

dove, per brevità, si è posto

$$\begin{aligned} f_u(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} \bar{u}(\mathbf{x}, t) - \int_0^t \int_{\Gamma_p} G(r, t, \tau) \bar{p} d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_u} \frac{\partial G}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) \bar{u} d\gamma_\xi d\tau, \\ f_p(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{2} \bar{p}(\mathbf{x}, t) + \int_0^t \int_{\Gamma_p} \frac{\partial G}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) \bar{p} d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_u} \frac{\partial^2 G}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) \bar{u} d\gamma_\xi d\tau. \end{aligned}$$

Scriviamo esplicitamente i nuclei che compaiono in (1.5.7).

$$(V\psi)(x, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{c}{2\pi} \frac{H[c(t-\tau) - r]}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \psi(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau \quad (1.5.8)$$

$$(K\psi)(x, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \left[ \frac{c}{2\pi} \frac{H[c(t-\tau) - r]}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \right] \psi(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau,$$

Osserviamo che

$$\frac{\partial G}{\partial n_{\xi}} = \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n_{\xi}} = \frac{\partial r}{\partial n_{\xi}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\sqrt{c(t-\tau) + r}} \frac{H[c(t-\tau) - r]}{\sqrt{c(t-\tau) - r}} \right).$$

Eseguendo la derivata del prodotto, nel secondo addendo lasciamo indicata la derivata rispetto ad  $r$ . Notando che

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{H[c(t-\tau) - r]}{\sqrt{c(t-\tau) - r}} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{H[c(t-\tau) - r]}{\sqrt{c(t-\tau) - r}}$$

possiamo integrare questo contributo per parti rispetto al tempo. Grazie alle condizioni iniziali omogenee, con opportuni raccoglimenti, l'operatore  $K$  si riduce a

$$(K\psi) = - \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{c}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n_{\xi}} \frac{H[c(t-\tau) - r]}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \left[ \frac{\psi_{\tau}(\xi, \tau)}{c} + \frac{\psi(\xi, \tau)}{c(t-\tau) + r} \right] d\gamma_{\xi} d\tau. \quad (1.5.9)$$

Per quanto riguarda i nuclei della seconda equazione, per ricavare  $K'$  si procede in modo del tutto analogo e si ottiene

$$(K'\psi) = \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{c}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n_{\mathbf{x}}} \frac{H[c(t-\tau) - r]}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \left[ \frac{\psi_{\tau}(\xi, \tau)}{c} + \frac{\psi(\xi, \tau)}{c(t-\tau) + r} \right] d\gamma_{\xi} d\tau. \quad (1.5.10)$$

Per riscrivere l'operatore  $D$  i calcoli sono decisamente più lunghi ma i passaggi fondamentali sono sempre quelli di scomporre in modo opportuno la funzione integranda, effettuare opportuni cambi di variabile di derivazione (in particolare da spaziale a temporale), integrare per parti rispetto al tempo e infine raccogliere opportunamente i vari termini. Si ottiene infine

$$\begin{aligned} (D\psi)(x, t) = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{H(c(t-\tau) - r)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \frac{\partial^2 r}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_{\xi}} \left[ \psi_{\tau}(\xi, \tau) + \frac{c\psi(\xi, \tau)}{c(t-\tau) + r} \right] d\gamma_{\xi} d\tau \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{H(c(t-\tau) - r)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \frac{\partial r}{\partial n_{\xi}} \frac{\partial r}{\partial n_{\mathbf{x}}} \left[ \frac{\psi_{\tau\tau}(\xi, \tau)}{c} + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\psi_{\tau}(\xi, \tau)}{c(t-\tau) + r} + 3 \frac{c\psi(\xi, \tau)}{[c(t-\tau) + r]^2} \right] d\gamma_{\xi} d\tau. \quad (1.5.11) \end{aligned}$$

## 1.6 Risultati di esistenza ed unicità

Descriviamo brevemente i risultati di esistenza ed unicità delle soluzioni delle equazioni integrali di contorno appena ricavate.

Come evidenziato in [13] e in [17], tali teoremi sono recenti e non esauriscono tutti i casi possibili. Questa scarsità è sostanzialmente dovuta al fatto che, a differenza di quanto avviene nel caso ellittico, le immagini degli operatori integrali che compaiono ora non sono chiuse in un qualche naturale spazio funzionale. Pertanto non è possibile applicare la classica teoria di Fredholm per studiare le proprietà di tali operatori.

I primi risultati di esistenza ed unicità sono dovuti a Bamberger e Ha Duong. Sono dimostrati in [10] e [11] e riguardano rispettivamente problemi di Dirichlet del tipo (Di3), (De3) (operatore integrale di singolo strato) e problemi di Neumann del tipo (Ni4), (Ne4) (derivata normale dell'operatore integrale di doppio strato). Li riporteremo seguendo la rielaborazione di [22].

Consideriamo il problema di Dirichlet (1.2.2) esterno ed omogeneo ( $\Omega = \Omega^e$ ,  $h \equiv 0$ ,  $u_0 \equiv v_0 \equiv 0$ ).

Estendiamo la funzione incognita  $u$  e il dato  $\bar{u}$  a 0 per  $t < 0$ . Supponiamo di aver così ottenuto delle funzioni

$$\begin{aligned} u &: \mathbb{R} \rightarrow H^1(\Omega^e) \\ \bar{u} &: \mathbb{R} \rightarrow H^{1/2}(\Gamma) \end{aligned}$$

trasformabili secondo Laplace. Riprendendo le notazioni del paragrafo 1.3, definiamo le trasformate

$$\begin{aligned} \hat{u}(\mathbf{x}, \omega) &:= \mathcal{L}[u](\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \\ \hat{\bar{u}}(\mathbf{x}, \omega) &:= \mathcal{L}[\bar{u}](\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt, \end{aligned}$$

con  $\omega = \eta + i\sigma$  e  $\sigma \geq \sigma_0$  dove  $\sigma_0 \in \mathbb{R}$  è l'ascissa di assoluta convergenza (senza perdere generalità  $\sigma_0 \geq 0$ ). Ricordando le proprietà della trasformata di Laplace e sfruttando le condizioni iniziali omogenee calcoliamo

$$\mathcal{L}[\Delta u](\mathbf{x}, \omega) = \Delta \hat{u}(\mathbf{x}, \omega) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right](\mathbf{x}, \omega) = -\omega^2 \hat{u}(\mathbf{x}, \omega).$$

Sostituendo nel problema originario otteniamo

$$\begin{cases} \Delta \hat{u}(\mathbf{x}, \omega) + \omega^2 \hat{u}(\mathbf{x}, \omega) = 0 & \mathbf{x} \in \Omega^e \\ \hat{u}(\mathbf{x}, \omega) = \hat{\bar{u}}(\mathbf{x}, \omega) & \mathbf{x} \in \Gamma, \end{cases} \quad (1.6.1)$$

che è un problema di Dirichlet associato all'*equazione di Helmholtz*. Abbiamo che

**Proposizione 1.6.1.** *Per ogni  $\omega \in \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \geq \sigma_0 \geq 0\}$  il problema (1.6.1) ammette un'unica soluzione  $\hat{u} \in H^1(\Omega^e)$ . Vale inoltre la stima*

$$\|\hat{u}\|_{\Omega^e, \omega} := \left( \int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2 + |\omega \hat{u}|^2 \right)^{1/2} \leq C \frac{1}{\sigma^2} \max \left\{ \frac{1}{\sigma_0}, 1 \right\} |\omega|^3 |\hat{u}|_{1/2}^2,$$

dove la costante  $C$  dipende solo da  $\Gamma$ .

Scriviamo ora la formula di rappresentazione della soluzione del problema trasformato mediante potenziale di singolo strato

$$\hat{u}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\Gamma} G_{\omega}(\mathbf{x}, \xi) \hat{\varphi}(\xi, \omega) d\gamma_{\xi},$$

dove  $\hat{u} \in C^1(\overline{\Omega^e}) \cup C^1(\overline{\Omega^i})$ ,  $G_{\omega}$  è la soluzione fondamentale dell'equazione di Helmholtz e  $\hat{\varphi} = [\partial_{\mathbf{n}} \hat{u}]_{\Gamma}$  è il salto della derivata normale di  $\hat{u}$  attraverso il bordo.

Sfruttando la continuità del potenziale di singolo strato, esprimiamo l'equazione integrale di contorno per  $\mathbf{x} \in \Gamma$

$$\hat{u}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\Gamma} G_{\omega}(\mathbf{x}, \xi) \hat{\varphi}(\xi, \omega) d\gamma_{\xi} =: (V_{\omega} \hat{\varphi})(\mathbf{x}, \omega). \quad (1.6.2)$$

Osservando che  $V_{\omega}$  è un isomorfismo da  $H^{1/2}(\Gamma)$  ad  $H^{-1/2}(\Gamma)$  otteniamo l'esistenza e l'unicità della soluzione  $\hat{\varphi}$  di (1.6.2).

Introduciamo la seguente

**Notazione.** *Sia  $E$  un spazio di Banach. Denotiamo con  $\mathcal{L}'(E)$  lo spazio delle funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ , nulle in  $\mathbb{R}^-$ , che siano trasformabili secondo Laplace per ogni  $\sigma \geq \sigma_0$ ,  $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ .*

Per quanto riguarda il problema originario, basta applicare il teorema di Paley-Wiener a  $\hat{u}$  e a  $\hat{\varphi}$  per dimostrare che sono le trasformate di Laplace di due funzioni appartenenti rispettivamente ad  $H^1(\Omega^e)$  ed  $H^{-1/2}(\Gamma)$  ed ottenere il seguente

**Teorema 1.6.2.** *Per ogni  $\bar{u} \in \mathcal{L}'(H^{1/2}(\Gamma))$  il problema (1.2.2) ammette un'unica soluzione  $u \in \mathcal{L}'(H^1(\Omega^e))$  rappresentabile univocamente mediante il potenziale ritardato di singolo strato*

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} G(r, t, \tau) \varphi(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau = (\mathcal{V}\varphi)(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega^e, t \in [0, T].$$

Otteniamo lo stesso risultato considerando il problema di Dirichlet interno (con  $\Omega = \Omega^i$ ).

**Notazione.** Sia  $F$  uno spazio di Hilbert. Definiamo

$$H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, F) = \{f \in \mathcal{L}'(F) \mid e^{-\sigma t} \Lambda^s f \in L^2(\mathbb{R}, F)\},$$

dove  $\sigma > 0$ ,  $s \in \mathbb{R}$  e  $\Lambda^s$  è un operatore da  $\mathcal{L}'(F)$  in se stesso definito da

$$\Lambda^s f = \mathcal{L}^{-1} \left[ (-i\omega)^s \widehat{f}(\omega) \right].$$

Procedendo analogamente a prima, si ricava il seguente risultato di esistenza ed unicità per la soluzione del problema di Neumann (sia interno che esterno).

**Teorema 1.6.3.** Per ogni  $\bar{p} \in H_\sigma^{r_0}(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\Gamma))$  con  $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ , il problema (1.2.3) ammette un'unica soluzione  $u \in H_\sigma^{r_0-1}(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\Gamma))$  rappresentabile univocamente mediante il potenziale ritardato di doppio strato

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) \phi(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau =: (\mathcal{K}\phi)(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Omega, t \in [0, T],$$

dove  $\phi$  è la soluzione dell'equazione integrale di contorno

$$\bar{p}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_\Gamma \frac{\partial^2 G}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi} \phi(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau =: (D\phi)(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma, t \in [0, T].$$

I due autori propongono anche un'importante formulazione debole per le precedenti equazioni integrali (il metodo di Bamberger-Ha Duong). Senza entrare troppo nei dettagli, essi considerano una formulazione debole dell'equazione integrale di Helmholtz e, tramite la formula di Parseval, la trasformano in una formulazione debole per l'equazione delle onde, dimostrandone la continuità e la coercività.

Riescono così a ottenere l'esistenza ed unicità della soluzione debole ed una stima a priori.

## Capitolo 2

# Formulazione debole e discretizzazione

In questo capitolo introduciamo il metodo di Galerkin agli elementi di contorno (*BEM*, *Boundary Element Method*) di tipo energetico. Tale metodo è basato su una particolare formulazione debole per le equazioni integrali finora considerate, ricavata a partire dall'identità dell'energia. A differenza di altri approcci presenti in letteratura, quello ora adottato ha il vantaggio di essere stabile e di possedere buone proprietà teoretiche.

Procederemo quindi con la discretizzazione, costruendo una decomposizione del contorno del problema e fissando, relativamente ad essa, opportuni spazi funzionali finito-dimensionali cui devono appartenere le funzioni test e le funzioni di base che si vogliono utilizzare per approssimare le incognite.

Indagheremo quindi le proprietà della matrice del sistema lineare associato al problema discretizzato e descriveremo la tecnica del time-marching, utilizzata per una efficiente risoluzione di tale sistema.

Infine descriveremo il metodo utilizzato per la costruzione degli elementi matriciali, soffermandoci in particolare sugli schemi di quadratura numerica sfruttati. Per una trattazione formale e completa del classico metodo di Galerkin rimandiamo a [31] e a [14], [40] (questi ultimi nel caso specifico di equazioni integrali di contorno).

### 2.1 Formulazione debole energetica

Consideriamo il problema misto interno (1.2.4) nel caso omogeneo e la sua riscrittura integrale ( $\mathcal{M}i$ ). Per risolvere numericamente tale equazione integrale ne scriviamo innanzitutto la formulazione debole. Tipicamente essa è ottenuta moltiplicando scalarmente ambo i membri dell'equazione per una funzione test appartenente allo stesso spazio funzionale della funzione incognita [31]. In dipendenza dal prodotto scalare scelto si ottengono vari tipi di formulazione debole.

La scelta più immediata, nota in letteratura come formulazione  $L^2$ , è quella di considerare il prodotto scalare in  $L^2(\Sigma_T)$ , dove  $\Sigma_T$  è la superficie laterale del cilindro spazio-temporale  $\Omega \times [0, T]$ . Tuttavia tale procedimento porta a forti problemi di instabilità numerica (si confronti, ad esempio, [12]) ed è pertanto necessario cercare un'alternativa.

Osserviamo che la soluzione  $u(\mathbf{x}, t)$  del problema (1.2.1) omogeneo soddisfa la seguente *identità dell'energia* (d'ora in avanti, per alleggerire la scrittura, utilizzeremo spesso la notazione  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$  e  $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u, T) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{u_t(\mathbf{x}, T)}{c} \right)^2 + |\nabla u(\mathbf{x}, T)|^2 \right] d\omega_{\mathbf{x}} = \\ &= \int_{\Gamma} \int_0^T u_t(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial n_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, t) dt d\gamma_{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Il nome è pienamente giustificato in quanto la prima uguaglianza rappresenta fisicamente l'energia totale, somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, del sistema in questione.

Ricaviamo tale identità a partire dal problema di Cauchy (1.2.1) per l'equazione delle onde omogenea con condizioni iniziali omogenee.

Moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione differenziale per  $u_t$

$$u_t \left( \frac{1}{c^2} u_{tt} - \Delta u \right) = 0.$$

Riscriviamo il primo membro nel seguente modo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \frac{u_t^2}{c^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} (\Delta u) = 0.$$

Integriamo quindi su  $\Omega \times [0, T]$ , ottenendo

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_t}{c} \right)^2 dt d\omega_{\mathbf{x}} - \int_{\Omega} \int_0^T u_t \Delta u dt d\omega_{\mathbf{x}} = 0. \quad (2.1.2)$$

Eseguiamo l'integrale temporale del primo addendo e applichiamo il teorema 1.4.1 di integrazione per parti al secondo addendo. Ricordando che  $u_t(\mathbf{x}, 0) = 0$ , dalla (2.1.2) si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \frac{u_t}{c} \right)^2(\mathbf{x}, T) d\omega_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega} \int_0^T (\nabla u_t \cdot \nabla u)(\mathbf{x}, t) dt d\omega_{\mathbf{x}} \\ - \int_{\Gamma} \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) dt d\omega_{\mathbf{x}} = 0. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Soffermiamoci sul secondo addendo. Commutando derivata temporale e gradiente e supponendo che all'istante iniziale anche tutte le derivate spaziali

siano nulle, esso risulta:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_0^T \left[ \nabla \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \cdot \nabla u \right] (\mathbf{x}, t) dt d\omega_{\mathbf{x}} &= \int_{\Omega} \int_0^T \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla u) \cdot \nabla u \right] (\mathbf{x}, t) dt d\omega_{\mathbf{x}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (|\nabla u|)^2 (\mathbf{x}, t) dt d\omega_{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|)^2 (\mathbf{x}, T) d\omega_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Sostituiamo nella (2.1.3), ottenendo

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \frac{u_t}{c} \right)^2 (\mathbf{x}, T) d\omega_{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|)^2 (\mathbf{x}, T) d\omega_{\mathbf{x}} - \int_{\Gamma} \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} dt d\gamma_{\mathbf{x}} = 0,$$

che è proprio la (2.1.1).

L'identità dell'energia ci suggerisce, in modo naturale, un prodotto interno da sostituire a quello di  $L^2(\Sigma_T)$ .

Consideriamo infatti la prima equazione integrale del sistema ( $\mathcal{M}i$ ) e ricordiamo che essa proviene direttamente dalla formula di rappresentazione (1.4.9) per  $u(\mathbf{x}, t)$ . Pertanto, basandoci sull'ultima uguaglianza di (2.1.1), deriviamo ambo i membri rispetto al tempo e li moltiplichiamo per una funzione test  $\psi(\mathbf{x}, t)$  appartenente allo stesso spazio funzionale di  $\partial_n u$ ; integriamo infine su  $\Gamma_u \times [0, T] =: \Sigma_T^u$ . Utilizzando le notazioni introdotte in (1.5.7) essa risulta

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_u} \int_0^T \psi(\mathbf{x}, t) \int_{\Gamma_u} \int_0^t \left[ G(r, t, \tau) \frac{\partial u}{\partial n_{\xi}}(\xi, \tau) \right]_t d\tau d\gamma_{\xi} dt d\gamma_{\mathbf{x}} \\ &- \int_{\Gamma_u} \int_0^T \psi(\mathbf{x}, t) \int_{\Gamma_p} \int_0^t \left[ \frac{\partial G}{\partial n_{\xi}}(r, t, \tau) u(\xi, \tau) \right]_t d\tau d\gamma_{\xi} dt d\gamma_{\mathbf{x}} = \\ &= \int_{\Gamma_u} \int_0^T [f_u(\mathbf{x}, t)]_t \psi(\mathbf{x}, t) dt d\gamma_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Analogamente, ricordando che la seconda equazione del sistema ( $\mathcal{M}i$ ) si riferisce alla formula di rappresentazione (1.4.16) per le derivate direzionali (ed in particolare per la derivata normale)  $\partial_n u(\mathbf{x}, t)$ , moltiplichiamo ambo i membri per la derivata rispetto al tempo di una funzione test  $\eta(\mathbf{x}, t)$  appartenente allo stesso spazio funzionale di  $u$ ; integrando su  $\Gamma_p \times [0, T]$  otteniamo

$$\begin{aligned} &- \int_{\Gamma_p} \int_0^T \eta_t(\mathbf{x}, t) \int_{\Gamma_u} \int_0^t \left[ \frac{\partial G}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) \frac{\partial u}{\partial n_{\xi}}(\xi, \tau) \right] d\tau d\gamma_{\xi} dt d\omega_{\mathbf{x}} \\ &+ \int_{\Gamma_p} \int_0^T \eta_t(\mathbf{x}, t) \int_{\Gamma_p} \int_0^t \left[ \frac{\partial^2 G}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_{\xi}}(r, t, \tau) u(\xi, \tau) \right] d\tau d\gamma_{\xi} dt d\gamma_{\mathbf{x}} = \\ &= \int_{\Gamma_p} \int_0^T f_p(\mathbf{x}, t) \eta_t(\mathbf{x}, t) dt d\gamma_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Osserviamo che la formulazione debole di queste equazioni integrali nel dominio spazio-temporale coinvolge integrali quadrupli, doppi in spazio e doppi in tempo.

Scritta in maniera compatta, la formulazione debole energetica del sistema  $(\mathcal{M}i)$  risulta

$$\begin{cases} \langle (V\partial n_\xi u)_t, \psi \rangle_{L^2(\Sigma_T^u)} - \langle (Ku)_t, \psi \rangle_{L^2(\Sigma_T^u)} &= \langle (f_u)_t, \psi \rangle_{L^2(\Sigma_T^u)} \\ -\langle K'\partial n_\xi u, \eta_t \rangle_{L^2(\Sigma_T^p)} + \langle Du, \eta_t \rangle_{L^2(\Sigma_T^p)} &= \langle f_p, \eta_t \rangle_{L^2(\Sigma_T^p)}. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

**Osservazione.** A livello teorico sono state provate la continuità e la coercività della forma bilineare associata alla formulazione debole energetica, sotto opportune restrizioni e attraverso un'analisi mediante trasformata di Fourier. I risultati ottenuti sono stati raccolti in [5] per un problema di Dirichlet e in [8] per un problema di Neumann, entrambi esterni ad un ostacolo rettilineo.

Per tutti gli altri tipi di problemi che prenderemo in esame, in particolare per i problemi di tipo misto, non sono ancora state studiate in modo congiunto le proprietà analitiche delle forme bilineari che intervengono. In questi casi, la validità del metodo di Galerkin agli elementi di contorno energetico è confermata direttamente dalle simulazioni numeriche effettuate.

## 2.2 Discretizzazione

Una volta introdotta la formulazione debole energetica, per discretizzare il problema bisogna innanzitutto approssimare il dominio, che nel nostro caso è il prodotto  $\Gamma \times [0, T] =: \Sigma_T$ . Dovremo quindi considerare una partizione dell'intervallo temporale  $[0, T]$  e una *mesh* della curva regolare  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ .

In secondo luogo, relativamente a tali suddivisioni, bisogna fissare adeguati spazi funzionali finito-dimensionali, scegliendone anche una opportuna base. In questo modo possiamo esprimere le funzioni incognite come combinazione lineare delle funzioni di base e possiamo scegliere come funzioni test le stesse funzioni di base.

Nel nostro caso tali funzioni di base saranno del tipo

$$\psi(\mathbf{x}, t) = w(\mathbf{x})v(t),$$

cioè il prodotto di una funzione di forma spaziale per una funzione di forma temporale.

Per quanto riguarda la discretizzazione di  $[0, T]$ , consideriamo una decomposizione uniforme di ampiezza (*time step*)  $\Delta t = T/N_{\Delta t}$ ,  $N_{\Delta t} \in \mathbb{N}^+$ , generata dagli  $N_{\Delta t} + 1$  istanti temporali

$$t_k = k\Delta t, \quad k = 0, \dots, N_{\Delta t}.$$

Per l'approssimazione temporale scegliamo di utilizzare funzioni di forma costanti a tratti per  $\partial_n u(\mathbf{x}, t)$ , lineari a tratti per  $u(\mathbf{x}, t)$ . Formalmente definiamo, per  $k = 0, \dots, N_{\Delta t} - 1$ ,

$$v_k^p(t) = H[t - t_k] - H[t - t_{k+1}] \quad (2.2.1)$$

per l'approssimazione di  $\partial_n u$  e

$$v_k^u(t) = R(t - t_k) - R(t - t_{k+1}) \quad (2.2.2)$$

per l'approssimazione di  $u$ , dove compare la *funzione a rampa* così definita:

$$R(t - t_k) = \frac{t - t_k}{\Delta t} H[t - t_k]. \quad (2.2.3)$$

Per quanto riguarda la discretizzazione spaziale, utilizziamo il metodo di Galerkin BEM seguendo la ben nota procedura utilizzata nel caso di problemi stazionari. Consideriamo dapprima il bordo di Dirichlet  $\Gamma_u$ . Sia

$$\Delta_u = \{e_1^u, \dots, e_{M_u}^u\}$$

una mesh costituita da  $M_u$  elementi rettilinei tali che

- se  $i \neq j$ ,  $e_i^u$  ed  $e_j^u$  hanno in comune al più un estremo,
- $\bigcup_{i \in \{1, \dots, M_u\}} \bar{e}_i^u = \bar{\Gamma}_u$ .

Indichiamo con  $2l_i^u$  la lunghezza dell'elemento  $e_i^u$  e con  $l^u = \max\{2l_i^u \mid i = 1, \dots, M_u\}$ . Facciamo lo stesso con il bordo di Neumann  $\Gamma_p$ , con ovvi cambi di notazione. Definiamo il parametro di finezza della mesh  $l := \max\{l^u, l^p\}$ . Negli esempi numerici che tratteremo la mesh sarà sempre uniforme, ovvero  $l = l^u = l^p = 2l_i$ , per ogni elemento considerato.

Per le funzioni di forma spaziali, indicato con  $\mathbb{P}_{d_i}$  lo spazio dei polinomi algebrici di grado al più  $d_i$ , consideriamo lo spazio delle funzioni polinomiali a tratti

$$X_{-1,l} := \{w^p(\mathbf{x}) \in L^2(\Gamma_u) \mid w^p|_{e_i^u} \in \mathbb{P}_{d_i}, \forall e_i^u \in \Delta_u\} \quad (2.2.4)$$

per l'approssimazione di  $\partial_n u$  e lo spazio delle funzioni polinomiali a tratti e continue

$$X_{0,l} := \{w^u(\mathbf{x}) \in C^0(\Gamma_p) \mid w^u|_{e_j^p} \in \mathbb{P}_{d_j}, \forall e_j^p \in \Delta_p\} \quad (2.2.5)$$

per l'approssimazione di  $u$ . Tali scelte risultano coerenti col contesto funzionale del problema.

Osserviamo che il numero di incognite dipende sia dal numero di elementi spaziali, sia dal grado polinomiale scelto per le funzioni di forma. Pertanto indicheremo con  $N_u$  e con  $N_p$  il numero totale di gradi di libertà rispettivamente su  $\Gamma_u$  e su  $\Gamma_p$ .

Fissiamo dunque:

- una base  $w_j^p(\mathbf{x})$ ,  $j = 1, \dots, N_u$  per  $X_{-1,l}$ ,
- una base  $w_i^u(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, N_p$  per  $X_{0,l}$ ,

in modo tale che le funzioni di forma siano a supporto locale e lagrangiane, ovvero tali che, per ogni nodo portatore di incognita  $\mathbf{x}_k \in \Gamma_u$  e  $\mathbf{x}_h \in \Gamma_p$ ,

$$w_i^u(\mathbf{x}_k) = \delta_{ik}, \quad w_i^u(\mathbf{x}_h) = \delta_{ih}, \quad (2.2.6)$$

dove  $\delta_{ik}$  è la delta di Kronecker.

In definitiva le soluzioni del problema saranno approssimate nel seguente modo

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{k=0}^{N_{\Delta t}-1} \sum_{j=1}^{N_u} \tilde{p}_j^k w_j^p(\mathbf{x}) v_k^p(t), \quad (2.2.7)$$

$$u(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{k=0}^{N_{\Delta t}-1} \sum_{j=1}^{N_p} \tilde{u}_j^k w_j^u(\mathbf{x}) v_k^u(t). \quad (2.2.8)$$

Notiamo che, a livello di notazione, gli apici delle basi si riferiscono al tipo di funzione incognita da approssimare.

## 2.3 Costruzione della matrice

Abbiamo ora a disposizione tutti gli strumenti per procedere ad una riformulazione algebrica del metodo di Galerkin agli elementi di contorno energetico. Procedendo in modo standard, sostituiamo alle funzioni incognite in (2.1.4) le loro approssimazioni (2.2.7), (2.2.8) e consideriamo, al posto di una generica funzione test,

- $w_i^p(\mathbf{x}) v_h^p(t)$ ,  $i = 1, \dots, N_u$ ,  $h = 0, \dots, N_{\Delta t} - 1$  per la prima equazione del sistema (2.1.4),
- $w_i^u(\mathbf{x}) v_h^u(t)$ ,  $i = 1, \dots, N_p$ ,  $h = 0, \dots, N_{\Delta t} - 1$  per la seconda equazione del sistema (2.1.4).

Come risulterà più chiaro in seguito, la quantità  $t_h - t_k$  rivestirà una particolare importanza negli sviluppi successivi. Pertanto introduciamo la seguente notazione

$$\Delta_{hk} := t_h - t_k, \quad h, k = 0, \dots, N_{\Delta t} - 1$$

ed indichiamo il riferimento allo step temporale relativo alle quantità considerate mediante l'apice ( $\ell$ ), a significare che

$$t_h - t_k = (\ell + 1)\Delta t, \quad \ell = 0, \dots, N_{\Delta t} - 1.$$

Otteniamo così un sistema lineare

$$\mathbb{E} \alpha = \beta, \quad (2.3.1)$$

dove,

- $\mathbb{E}$  è una matrice quadrata di ordine  $(N_p + N_u) \cdot N_{\Delta t}$ , triangolare inferiore a blocchi  $\mathbb{E}^{(\ell)}$  di ordine  $(N_p + N_u)$ .

La struttura della matrice dipende dal fatto che, con riferimento all'espressione dei nuclei (1.5.8), (1.5.9), (1.5.10) e (1.5.11), se  $\Delta_{hk} < 0$  la funzione di Heaviside vale identicamente zero e pertanto il corrispondente blocco matriciale  $\mathbb{E}^{(\ell)}$  è nullo.

- $\alpha$  è il vettore delle incognite così organizzate:

$$\alpha = \left( (\alpha^{(\ell)})_{\ell=0, \dots, N_{\Delta t}-1} \right)^\top \quad (2.3.2)$$

$$\alpha^{(\ell)} = \left( \tilde{p}_1^{(\ell)}, \dots, \tilde{p}_{N_u}^{(\ell)}, \tilde{u}_1^{(\ell)}, \dots, \tilde{u}_{N_p}^{(\ell)} \right)^\top. \quad (2.3.3)$$

- $\beta$  è il vettore dei corrispondenti termini noti.

Indaghiamo in modo più approfondito la struttura della matrice  $\mathbb{E}$ .

Gli elementi che compaiono in ciascun blocco non nullo sono sostanzialmente di quattro tipi, riconducibili ai quattro diversi nuclei che compaiono in (2.1.4). Quindi, con il fissato ordine delle incognite, ciascun blocco è a sua volta costituito da quattro sottoblocchi così organizzati:

$$\mathbb{E}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{uu}^{(\ell)} & \mathbb{E}_{up}^{(\ell)} \\ \mathbb{E}_{pu}^{(\ell)} & \mathbb{E}_{pp}^{(\ell)} \end{bmatrix}.$$

I due sottoblocchi diagonali sono quadrati di ordine rispettivamente  $N_u$  ed  $N_p$ .

Come già evidenziato nel primo capitolo, dai problemi di tipo misto si possono ottenere, come casi particolari, problemi di Dirichlet e di Neumann. Questo risulta chiaro anche osservando la sottostruttura a blocchi della matrice  $\mathbb{E}$ . Per un problema di Dirichlet il blocco  $\mathbb{E}^{(\ell)}$  si riduce al solo  $\mathbb{E}_{uu}^{(\ell)}$ , mentre per un problema di Neumann al solo  $\mathbb{E}_{pp}^{(\ell)}$ .

Infine osserviamo che i blocchi  $\mathbb{E}^{(\ell)}$  sono matrici simmetriche. Infatti, per quanto riguarda i sottoblocchi diagonali, risulta immediatamente dalla definizione che  $\mathbb{E}_{uu}^{(\ell)} = (\mathbb{E}_{uu}^{(\ell)})^\top$  e  $\mathbb{E}_{pp}^{(\ell)} = (\mathbb{E}_{pp}^{(\ell)})^\top$ . Per quanto riguarda invece i due blocchi antidiagonali, dimostriamo la seguente

**Proposizione.** Siano  $v_k^u(t)$  e  $v_k^p(t)$  fissati come in (2.2.1) e (2.2.2), rispettivamente. Allora

$$\mathbb{E}_{up}^{(\ell)} = \left( \mathbb{E}_{pu}^{(\ell)} \right)^\top.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo l'elemento  $(i, j)$  del blocco  $\mathbb{E}_{up}^{(\ell)}$ . Direttamente da (2.1.4), esso risulta

$$\int_0^T \int_{\Gamma_u} w_i^p(\mathbf{x}) v_h^p(t) [K(w_j^u v_k^u)]_t(\mathbf{x}, t) d\gamma_{\mathbf{x}} dt.$$

Sostituiamo a  $K(w_j^u v_k^u)$  la sua espressione (1.5.9)

$$\int_0^T \int_{\Gamma_u} w_i^p(\mathbf{x}) v_h^p(t) \int_0^t \int_{\Gamma_p} \left[ \frac{\partial r}{\partial n_\xi} \frac{c}{2\pi} \frac{H[c(t-\tau) - r]}{[c^2(t-\tau)^2 - r^2]^{1/2}} \left( \left[ \frac{w_j^u(\xi) v_k^u(\tau)}{c} \right]_\tau + \frac{w_j^u(\xi) v_k^u(\tau)}{c(t-\tau) + r} \right) \right]_t d\gamma_\xi d\tau d\gamma_{\mathbf{x}} dt.$$

Riscriviamo opportunamente la funzione integranda ed eseguiamo la derivata del prodotto di due fattori, cambiando variabile per quanto riguarda la derivata del primo. Otteniamo così

$$\begin{aligned} & \frac{c}{2\pi} \int_0^T \int_{\Gamma_u} w_i^p(\mathbf{x}) v_h^p(t) \int_0^t \int_{\Gamma_p} \frac{\partial r}{\partial n_\xi} \\ & \left\{ - \left[ \frac{H[c(t-\tau) - r]}{[c(t-\tau) - r]^{1/2}} \right]_\tau \frac{1}{[c(t-\tau) + r]^{1/2}} \left( \left[ \frac{w_j^u(\xi) v_k^u(\tau)}{c} \right]_\tau + \frac{w_j^u(\xi) v_k^u(\tau)}{c(t-\tau) + r} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{H[c(t-\tau) - r]}{[c(t-\tau) - r]^{1/2}} \left[ \frac{1}{[c(t-\tau) + r]^{1/2}} \left( \left[ \frac{w_j^u(\xi) v_k^u(\tau)}{c} \right]_\tau + \frac{w_j^u(\xi) v_k^u(\tau)}{c(t-\tau) + r} \right) \right]_t \right\} \\ & d\gamma_\xi d\tau d\gamma_{\mathbf{x}} dt. \end{aligned}$$

Integriamo internamente per parti rispetto alla variabile temporale il primo addendo. Notando che per  $\tau = t$  l'argomento della funzione di Heaviside è negativo e ricordando che, poichè il problema ora in esame ha condizioni iniziali omogenee,  $v_h^u(0) = (v_h^u)_t(0) = 0$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} & \frac{c}{2\pi} \int_0^T \int_{\Gamma_u} w_i^p(\mathbf{x}) v_h^p(t) \int_0^t \int_{\Gamma_p} \frac{\partial r}{n_\xi} \\ & \left\{ \frac{H[c(t-\tau) - r]}{[c(t-\tau) - r]^{1/2}} \left[ \frac{1}{[c(t-\tau) + r]^{1/2}} \left( \left[ \frac{w_j^u(\xi) v_k^u(\tau)}{c} \right]_\tau + \frac{w_j^u(\xi) v_k^u(\tau)}{c(t-\tau) + r} \right) \right]_\tau + \right. \\ & \left. + \frac{H[c(t-\tau) - r]}{[c(t-\tau) - r]^{1/2}} \left( -\frac{1}{2} \frac{[w_j^u(\xi) v_k^u(\tau)]_\tau}{[c(t-\tau) + r]^{3/2}} - \frac{3}{2} c \frac{w_j^u(\xi) v_k^u(\tau)}{[c(t-\tau) + r]^{5/2}} \right) \right\} d\gamma_\xi d\tau d\gamma_{\mathbf{x}} dt = \\ & = \frac{c}{2\pi} \int_0^T \int_{\Gamma_u} w_i^p(\mathbf{x}) v_h^p(t) \int_0^t \int_{\Gamma_p} \frac{\partial r}{\partial n_\xi} \\ & \left\{ \frac{H[c(t-\tau) - r]}{[c(t-\tau) - r]^{1/2}} \left( \frac{[w_j^u(\xi) v_k^u(\tau)]_{\tau\tau}}{c[c(t-\tau) + r]^{1/2}} + \frac{3}{2} \frac{[w_j^u(\xi) v_k^u(\tau)]_\tau}{[c(t-\tau) + r]^{3/2}} + \frac{3}{2} c \frac{w_j^u(\xi) v_k^u(\tau)}{[c(t-\tau) + r]^{5/2}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{H[c(t-\tau) - r]}{[c(t-\tau) - r]^{1/2}} \left( -\frac{1}{2} \frac{[w_j^u(\xi) v_k^u(\tau)]_\tau}{[c(t-\tau) + r]^{3/2}} - \frac{3}{2} c \frac{w_j^u(\xi) v_k^u(\tau)}{[c(t-\tau) + r]^{5/2}} \right) \right\} d\gamma_\xi d\tau d\gamma_{\mathbf{x}} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c}{2\pi} \int_0^T \int_{\Gamma_u} w_i^p(\mathbf{x}) v_h^p(t) \int_0^t \int_{\Gamma_p} \frac{\partial r}{\partial n_\xi} \\
&\quad \left\{ \frac{H[c(t-\tau) - r]}{[c(t-\tau) - r]^{1/2}} \left( \frac{[w_j^u(\xi) v_k^u(\tau)]_{\tau\tau}}{c[c(t-\tau) + r]^{1/2}} + \frac{[w_j^u(\xi) v_k^u(\tau)]_\tau}{[c(t-\tau) + r]^{3/2}} \right) \right\} d\gamma_\xi d\tau d\gamma_{\mathbf{x}} dt.
\end{aligned}$$

Osserviamo che, con opportuni raccoglimenti, nell'integrale precedente compare la soluzione fondamentale (1.3.8); lo riscriviamo quindi in forma più compatta

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Gamma_u} w_i^p(\mathbf{x}) v_h^p(t) \int_0^t \int_{\Gamma_p} \frac{\partial r}{\partial n_\xi} G(r, t, \tau) \left( \frac{[w_j^u(\xi) v_k^u(\tau)]_{\tau\tau}}{c} + \frac{[w_j^u(\xi) v_k^u(\tau)]_\tau}{c(t-\tau) + r} \right) \\
&\quad d\gamma_\xi d\tau d\gamma_{\mathbf{x}} dt.
\end{aligned}$$

A questo punto basta osservare che  $\partial_{n_\xi} r = -\partial_{n_{\mathbf{x}}} r$  e che

$$v_h^p(t) [v_k^u(\tau)]_{\tau\tau} = [v_h^u(t)]_t [v_k^p(\tau)]_\tau$$

in quanto, con la nostra scelta delle funzioni di base per il tempo,

$$v_k^p(t) = [v_k^u(t)]_t.$$

Infine, scambiando gli integrali spaziali, dalla precedente catena di uguaglianze ricaviamo

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_{\Gamma_p} [w_j^u(\mathbf{x}) v_h^u(t)]_t \int_0^t \int_{\Gamma_u} \frac{\partial r}{\partial n_{\mathbf{x}}} G(r, t, \tau) \left( \frac{[w_i^p(\xi) v_k^p(\tau)]_\tau}{c} + \frac{w_i^p(\xi) v_k^p(\tau)}{c(t-\tau) + r} \right) \\
&\quad d\gamma_\xi d\tau d\gamma_{\mathbf{x}} dt.
\end{aligned}$$

Grazie alla (1.5.10) otteniamo in definitiva

$$-\int_0^T \int_{\Gamma_p} [w_j^u(\mathbf{x}) v_h^u(t)]_t (K'[w_i^u v_k^u])(\mathbf{x}, t) d\gamma_{\mathbf{x}} dt,$$

che è proprio l'elemento  $(j, i)$  del blocco  $\mathbb{E}_{pu}^{(\ell)}$ . □

Procediamo ora ricavando una espressione formale per le diverse tipologie di elementi della matrice  $\mathbb{E}$ . Fissiamo arbitrariamente:

- $w_i^{q'}(\mathbf{x}) v_h^{q'}(t)$ , con  $h = 0, \dots, N_{\Delta t} - 1$ ,  $i = 1, \dots, N_{q''}$ , dove  $q' \in \{u, p\}$  e  $q'' \in (\{u, p\} \setminus \{q'\})$  come funzione test;
- $w_j^{q'}(\mathbf{x}) v_k^{q'}(t)$ , con  $k = 0, \dots, N_{\Delta t} - 1$ ,  $j = 1, \dots, N_{q''}$ , dove  $q' \in \{u, p\}$  e  $q'' \in (\{u, p\} \setminus \{q'\})$  come funzione di base che approssima la funzione incognita.

In questo modo risultano univocamente determinati sia  $\Delta_{hk}$  che l'indice  $\ell$ . Consideriamo dunque il blocco  $\mathbb{E}^{(\ell)}$ .

Grazie alla proposizione precedente, tale blocco è simmetrico. Sfruttiamo tale proprietà costruendo solo la parte triangolare superiore e ottenendo la rimanente per simmetria.

Dopo una doppia integrazione analitica nelle variabili temporali, il generico elemento dei sottoblocchi  $\mathbb{E}_{uu}^{(\ell)}$ ,  $\mathbb{E}_{up}^{(\ell)}$  e  $\mathbb{E}_{pp}^{(\ell)}$  è dato, rispettivamente, dalle seguenti espressioni:

$$\bullet \sum_{\alpha, \beta=0}^1 (-1)^{\alpha+\beta} \int_{\Gamma_u} w_i^p(\mathbf{x}) \int_{\Gamma_u} H[c\Delta_{h+\alpha, k+\beta}-r] \bar{V}(r, t_{h+\alpha}, t_{k+\beta}) w_j^p(\xi) d\gamma_\xi d\gamma_{\mathbf{x}},$$

dove

$$\bar{V}(r, t_h, t_k) = \frac{1}{2\pi} \left[ \log \left( c\Delta_{hk} + \sqrt{c^2\Delta_{hk}^2 - r^2} \right) - \log r \right]; \quad (2.3.4)$$

$$\bullet \sum_{\alpha, \beta=0}^1 (-1)^{\alpha+\beta} \int_{\Gamma_u} w_i^p(\mathbf{x}) \int_{\Gamma_p} H[c\Delta_{h+\alpha, k+\beta}-r] \bar{K}(r, t_{h+\alpha}, t_{k+\beta}) w_j^u(\xi) d\gamma_\xi d\gamma_{\mathbf{x}},$$

dove

$$\bar{K}(r, t_h, t_k) = \frac{1}{2\pi c \Delta t} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_\xi}{r^2} \sqrt{c^2\Delta_{hk}^2 - r^2}; \quad (2.3.5)$$

$$\bullet \sum_{\alpha, \beta=0}^1 (-1)^{\alpha+\beta} \int_{\Gamma_p} w_i^u(\mathbf{x}) \int_{\Gamma_p} H[c\Delta_{h+\alpha, k+\beta}-r] \bar{D}(r, t_{h+\alpha}, t_{k+\beta}) w_j^p(\xi) d\gamma_\xi d\gamma_{\mathbf{x}},$$

dove

$$\begin{aligned} \bar{D}(r, t_h, t_k) = & \frac{1}{2\pi (\Delta t)^2} \left\{ \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_x \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_\xi}{r^2} \frac{\Delta_{hk} \sqrt{c^2\Delta_{hk}^2 - r^2}}{c r^2} + \right. \\ & \left. + \frac{(\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_\xi)}{2} \left[ \frac{\log(c\Delta_{hk} + \sqrt{c^2\Delta_{hk}^2 - r^2})}{c^2} - \frac{\log r}{c^2} - \frac{\Delta_{hk} \sqrt{c^2\Delta_{hk}^2 - r^2}}{c r^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

A questo punto è importante osservare che ciascun elemento dipende sostanzialmente dalla quantità  $\Delta_{hk}$ .

Utilizzando tutte le informazioni finora ricavate, possiamo riscrivere il sistema (2.3.1) sempre in maniera compatta, ma mettendone in risalto la struttura a blocchi.

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}^{(0)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbb{E}^{(1)} & \mathbb{E}^{(0)} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbb{E}^{(2)} & \mathbb{E}^{(1)} & \mathbb{E}^{(0)} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbb{E}^{(N_{\Delta t}-1)} & \mathbb{E}^{(N_{\Delta t}-2)} & \cdots & \mathbb{E}^{(1)} & \mathbb{E}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{(0)} \\ \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \\ \boldsymbol{\alpha}^{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}^{(N_{\Delta t}-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^{(0)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^{(N_{\Delta t}-1)} \end{pmatrix} \quad (2.3.7)$$

Una matrice così strutturata è detta triangolare inferiore di Toeplitz a blocchi. I pregi di una tale forma sono sostanzialmente due, egualmente notevoli. Il primo è che possiamo limitarci a costruire e a memorizzare i soli blocchi  $\mathbb{E}^{(0)}, \dots, \mathbb{E}^{(N_{\Delta t}-1)}$ , con una considerevole riduzione del costo computazionale e dello spazio di memoria richiesto.

Il secondo è legato alla risoluzione del sistema lineare. Infatti l'aspetto della matrice ci suggerisce una strategia basata su un procedimento di sostituzione in avanti a blocchi, detta *time-marching*.

Più rigorosamente, per ogni istante di tempo  $t_\ell = (\ell + 1)\Delta t$ , con  $\ell = 0, \dots, N_{\Delta t} - 1$ , consideriamo

$$\mathbf{z}^{(\ell)} := \mathbf{b}^{(\ell)} - \sum_{j=1}^{\ell} \mathbb{E}^{(j)} \boldsymbol{\alpha}^{(\ell-j)}$$

e risolviamo il sistema lineare ridotto

$$\mathbb{E}^{(0)} \boldsymbol{\alpha}^{(\ell)} = \mathbf{z}^{(\ell)}.$$

Così facendo, si nota facilmente che l'unica matrice da invertire è il blocco diagonale definito positivo  $\mathbb{E}^{(0)}$ , mentre tutti gli altri blocchi sono utilizzati per aggiornare il termine noto ad ogni passo temporale. Pertanto, a livello numerico, risulta conveniente utilizzare una tecnica di fattorizzazione effettuata sulla sola matrice  $\mathbb{E}^{(0)}$  al primo passo temporale e riutilizzata poi nei successivi passi.

## 2.4 Integrazione numerica

Esaminiamo ora la questione del calcolo numerico degli elementi della matrice  $\mathbb{E}$ . Poiché ogni elemento è ottenuto mediante una doppia integrazione nelle variabili spaziali, è necessario impiegare efficienti schemi di integrazione numerica che sappiano anche gestire le singolarità che i nuclei (2.3.4), (2.3.5) e (2.3.6) possono in certi casi presentare. Osserviamo che, una volta eseguita la doppia integrazione analitica in tempo, tali nuclei sono sostanzialmente riconducibili a quelli del caso stazionario (equazioni ellittiche).

Per valutare ogni integrale utilizzeremo una tecnica *element by element* seguita da *assemblaggio*. Essa consiste nel calcolare inizialmente ogni contribu-

to del tipo

$$\int_{e_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(\mathbf{x}) \int_{e_j} H[c\Delta_{hk} - r] \bar{S}(r, t_h, t_k) \tilde{w}_j^{(d_j)}(\xi) d\gamma_\xi d\gamma_{\mathbf{x}}, \quad (2.4.1)$$

dove  $\bar{S}$  è uno dei nuclei  $\bar{V}$ ,  $\bar{K}$ ,  $\bar{D}$ , mentre  $e_i$ ,  $e_j$  rappresentano gli elementi della mesh (gli apici relativi al tipo di bordo sono stati eliminati dalla notazione, essendo chiaro, in relazione al nucleo fissato, su quale tratto di bordo si integra). Le funzioni  $\tilde{w}_i^{(d_i)}$  rappresentano la restrizione all'elemento  $e_i$  delle funzioni lagrangiane che compaiono in (2.2.6).

Questi integrali locali vengono poi opportunamente assemblati a seconda della disposizione geometrica degli elementi della mesh spaziale.

Seguendo l'approccio di [7], per brevità nel seguito analizzeremo solo il caso in cui  $\bar{S} = \bar{D}$ , che è quello più difficoltoso da trattare numericamente in quanto può presentare ipersingolarità. Dall'espressione di  $\bar{D}$  data in (2.3.6) notiamo che, quando il raggio  $r$  tende a zero, il nucleo presenta una singolarità debole del tipo  $O(\log r)$  ed una ipersingolarità del tipo  $O(r^{-2})$ . La distanza  $r$  si può annullare quando

- $e_j \equiv e_i$ ; in questo caso bisogna definire sia l'integrale esterno che quello interno come *parti finite di Hadamard (HFP)\**, con una singolarità agli estremi ed una interna, rispettivamente (si confronti [2]).
- $e_i$  ed  $e_j$  sono consecutivi; in questo caso solo l'integrale esterno va inteso come parte finita di Hadamard, con la sigolarità situata nell'estremo  $\bar{e}_i \cap \bar{e}_j$  (si confronti [2]).

Nel seguito supporremo, per fissare le idee, che  $e_j \equiv e_{i+1}$  (contigui a destra). Le stesse considerazioni possono essere ripetute, con ovvi aggiustamenti, nel caso in cui  $e_j \equiv e_{i-1}$  (contigui a sinistra).

---

\*L'integrale a *parte finita di Hadamard* è definito per funzioni  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) \in C^p([a, b])$ ,  $p \geq 0$  come:

$$\int_a^b \frac{f(t)}{(t-x)^{p+1}} dt := \int_a^b \frac{f(t) - \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (t-x)^k}{(t-x)^{p+1}} dt + \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \mathcal{I}_{p+1-k}(x),$$

dove

$$\mathcal{I}_1(x) = \begin{cases} \log(x-a) & x = b \\ \log\left(\frac{b-x}{x-a}\right) & a < x < b \\ \log(b-x) & x = a \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{s+1} = \begin{cases} \frac{1}{s(a-x)^s} & x = b \\ \frac{1}{s(a-x)^s} - \frac{1}{s(b-x)^s} & a < x < b \quad s > 0 \\ -\frac{1}{s(b-x)} & x = a \end{cases}$$

Indaghiamo innanzitutto il

■ **DOMINIO DI INTEGRAZIONE.**

Eseguiamo un cambiamento della variabile di integrazione e consideriamo le coordinate locali  $s \in [0, 2l_i]$  per l'integrale esterno,  $z \in [0, 2l_j]$  per l'integrale interno.

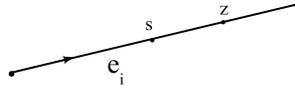
A causa della presenza della funzione di Heaviside  $H[c\Delta_{hk} - r]$ , il dominio di integrazione di

$$\int_0^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_0^{2l_j} H[c\Delta_{hk} - r] \bar{D}(r, t_h, t_k) \tilde{w}_j^{(d_j)}(z) dz ds \quad (2.4.2)$$

è dato in generale dall'intersezione del rettangolo  $[0, 2l_i] \times [0, 2l_j]$  con l'insieme  $\{(s, z) \mid r < c\Delta_{hk}\}$ , che dipende dall'espressione, in funzione delle coordinate  $(s, z)$ , del raggio  $r$ , che a sua volta dipende dalla disposizione geometrica degli elementi della mesh  $e_i, e_j$ .

Si possono presentare i seguenti casi:

□ **Elementi coincidenti** ( $e_j \equiv e_i$ )



Il raggio risulta essere  $r = |s - z|$ . Pertanto il dominio di integrazione è l'intersezione tra il quadrato  $[0, 2l_i] \times [0, 2l_i]$  e la striscia  $\{(s, z) \mid |s - z| < c\Delta_{hk}\}$ , dove la funzione di Heaviside è non nulla. Se poniamo

$$M_s = \max(0, s - c\Delta_{hk}), \quad m_s = \min(2l_i, s + c\Delta_{hk}),$$

il doppio integrale (2.4.2) è della forma

$$\int_0^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_{M_s}^{m_s} \bar{D}(r, t_h, t_k) \tilde{w}_j^{(d_j)}(z) dz ds.$$

Inoltre l'integrale esterno è stato suddiviso nei seguenti eventuali (figura 2.4.1) punti di spezzamento

$$s_1 = c\Delta_{hk}, \quad s_2 = 2l_i - c\Delta_{hk}. \quad (2.4.3)$$

Grazie a questa decomposizione, il numero di nodi da utilizzare per ottenere

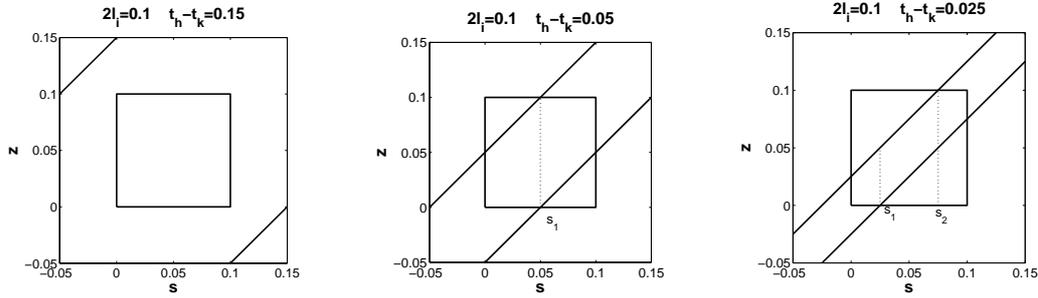


Figura 2.4.1: Dominio degli integrali doppi nel caso  $e_i \equiv e_j$ . Dove presenti, sono stati evidenziati i punti di spezzamento  $s_1, s_2$  dell'integrale esterno. In tutti i casi si è supposto  $c = 1$  e si hanno diverse situazioni al variare di  $\Delta_{hk}$ .

la semplice precisione nell'integrazione numerica esterna diminuisce drasticamente. La tabella 2.1 mette a confronto i due approcci (con spezzamento e senza spezzamento) per il calcolo del più semplice integrale

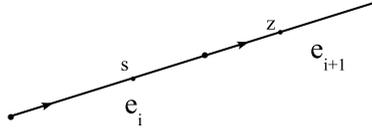
$$\int_0^{2l_i} \tilde{w}_i^{(0)}(s) \int_{M_s}^{m_s} \log \left( c\Delta_{hk} + \sqrt{c^2\Delta_{hk}^2 - |s-z|^2} \right) \tilde{w}_j^{(0)}(z) dz ds, \quad (2.4.4)$$

la cui funzione integranda è regolare per  $r \rightarrow 0$ .

	$\Delta_{hk} = 0.05$	$\Delta_{hk} = 0.05$	$\Delta_{hk} = 0.025$	$\Delta_{hk} = 0.025$
N. Nodi	senza spezzamento	con spezzamento	senza spezzamento	con spezzamento
4	$1.5871 \cdot 10^{-2}$	$1.2663 \cdot 10^{-5}$	$4.8220 \cdot 10^{-4}$	$4.7584 \cdot 10^{-6}$
8	$4.4374 \cdot 10^{-3}$	$4.8539 \cdot 10^{-7}$	$5.2265 \cdot 10^{-3}$	$7.3393 \cdot 10^{-7}$
16	$1.1928 \cdot 10^{-3}$	—	$2.1787 \cdot 10^{-4}$	—
32	$3.1162 \cdot 10^{-4}$	—	$3.9416 \cdot 10^{-4}$	—
64	$7.9969 \cdot 10^{-5}$	—	$2.1043 \cdot 10^{-5}$	—
128	$2.0301 \cdot 10^{-5}$	—	$2.5823 \cdot 10^{-5}$	—
256	$5.1162 \cdot 10^{-6}$	—	$2.0254 \cdot 10^{-6}$	—
512	$1.2786 \cdot 10^{-6}$	—	$1.1237 \cdot 10^{-6}$	—
1024	$3.1285 \cdot 10^{-7}$	—	$6.6507 \cdot 10^{-7}$	—
2048	—	—	—	—

Tabella 2.1: Errore relativo nell'approssimazione numerica mediante una classica formula di Gauss-Legendre dell'integrale esterno di (2.4.4) quando  $e_i \equiv e_j$ ,  $2l_i = 0.1$ ,  $c = 1$ . L'integrale interno è stato eseguito analiticamente. Il simbolo - significa che è stata raggiunta la semplice precisione.

□ **Elementi consecutivi allineati** ( $e_j \equiv e_{i+1}$ )



In questo caso il raggio  $r$  è espresso come  $r = z + 2l_i - s$ . Pertanto il dominio di integrazione (figura 2.4.2) è rappresentato dall'intersezione tra il rettangolo  $[0, 2l_i] \times [0, 2l_{i+1}]$  e il semipiano  $z < c\Delta_{hk} - 2l_i + s$ . Considerando la variabilità dei parametri, tale insieme è non vuoto se  $s > 2l_i - c\Delta_{hk}$ . Pertanto, avendo posto

$$M_0 = \max(0, 2l_i - c\Delta_{hk}), \quad m_s = \min(2l_{i+1}, c\Delta_{hk} - 2l_i + s),$$

il doppio integrale (2.4.2) risulta della forma

$$\int_{M_0}^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)} \int_0^{m_s} \overline{D}(r, t_h, t_k) \tilde{w}_{i+1}^{(d_{i+1})}(z) dz ds. \quad (2.4.5)$$

Anche in questo caso la quadratura numerica esterna è stata realizzata suddividendo, ove necessario, il dominio di integrazione esterno. Il punto di spezzamento è dato dalla seguente espressione:

$$s_1 = 2l_{i+1} + 2l_i - c\Delta_{hk}.$$

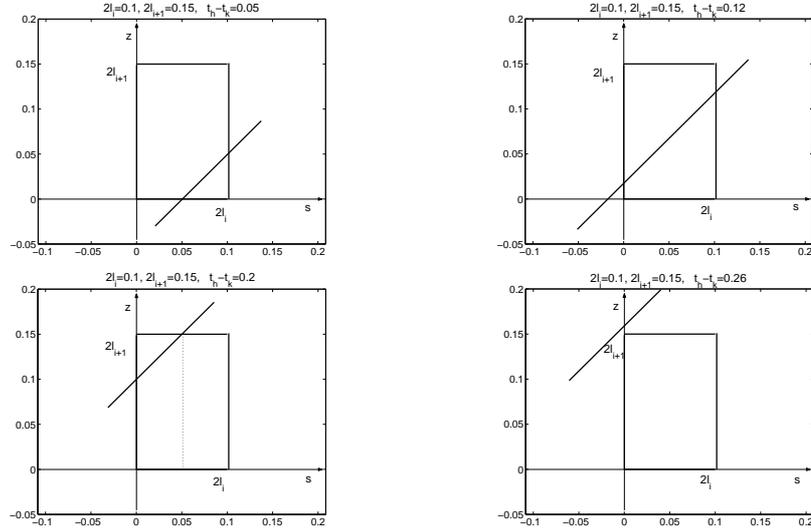
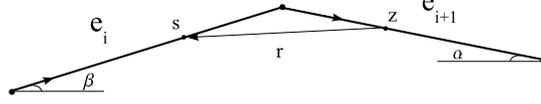


Figura 2.4.2: Il dominio  $[0, 2l_i] \times [0, 2l_{i+1}]$  e la retta  $z = c\Delta_{hk} - 2l_i + s$  per  $2l_i = 0.1$ ,  $2l_{i+1} = 0.15$ ,  $c = 1$  al variare del parametro  $\Delta_{hk}$ .

□ **Elementi consecutivi non allineati** ( $e_j \equiv e_{i+1}$ )



Riferendoci al grafico sopra riportato, poniamo  $\omega := \alpha + \beta$ . La distanza  $r$  è data dalla seguente uguaglianza:

$$r^2 = (2l_i - s)^2 + z^2 + 2(2l_i - s)z \cos(\omega)$$

con  $0 < \omega < \pi$ . Pertanto, in questo caso, il dominio di integrazione di (2.4.2) è dato dall'intersezione tra il rettangolo  $[0, 2l_i] \times [0, 2l_{i+1}]$  e l'ellisse  $r^2 - c^2 \Delta_{hk}^2 < 0$  centrata nel punto  $(0, 2l_i)$  (singolarità della funzione integranda).

A livello geometrico, i due assi dell'ellisse hanno direzione  $(1, 1)$  e  $(-1, 1)$  e hanno semilunghezza, rispettivamente,  $(1 - \cos(\omega))^{-1/2}$  e  $(1 + \cos(\omega))^{-1/2}$ . Segue immediatamente che, quando  $0 < \cos(\omega) < 1$ , l'asse maggiore è diretto lungo  $(1, 1)$ , mentre quando  $-1 < \cos(\omega) < 0$ , l'asse maggiore è diretto lungo  $(-1, 1)$ . Nel caso particolare in cui  $\cos(\omega) = 0$ , l'ellisse diventa una circonferenza. Inoltre l'angolo  $\theta := \pi - \omega$  tra i due elementi consecutivi determina l'eccentricità e il valore di  $\Delta_{hk}$  determina la dilatazione dell'ellisse. In figura 2.4.3 sono mostrate varie situazioni geometriche al variare dei parametri  $\Delta_{hk}$  e  $\theta$ .

A livello analitico, notiamo che la disequaglianza

$$z^2 + 2(2l_i - s)z \cos(\omega) + (2l_i - s)^2 - c^2 \Delta_{hk}^2 < 0. \quad (2.4.6)$$

può essere soddisfatta se e solo se  $c^2 \Delta_{hk}^2 - (2l_i - s)^2 \sin^2(\omega) > 0$ , ovvero se e solo se

$$2l_i - c \frac{\Delta_{hk}}{\sin(\omega)} < s < 2l_i + c \frac{\Delta_{hk}}{\sin(\omega)}.$$

Poiché  $s \in (0, 2l_i)$ , la limitazione superiore è sempre soddisfatta. Pertanto, per  $s > 2l_i - c \Delta_{hk} / \sin(\omega)$ , la (2.4.6) ha soluzioni

$$z_1^s < z < z_2^s, \quad \text{dove} \quad z_{1,2}^s = (2l_i - s) \cos \omega \mp \sqrt{c^2 \Delta_{hk}^2 - (2l_i - s)^2 \sin^2(\omega)}.$$

L'apice  $s$  indica, in maniera compatta, la dipendenza dei valori di  $z$  dalla variabile  $s$ . Poniamo

$$M_0 = \max\left(0, 2l_i - \frac{c \Delta_{hk}}{\sin(\omega)}\right), \quad M_s = \max(0, z_1^s), \quad m_s = \min(2l_{i+1}, z_2^s).$$

In questo caso l'integrale doppio (2.4.2) risulta

$$\int_{M_0}^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_{M_s}^{m_s} \overline{D}(r, t_h, t_k) \tilde{w}_{i+1}^{(d_{i+1})}(z) dz ds.$$

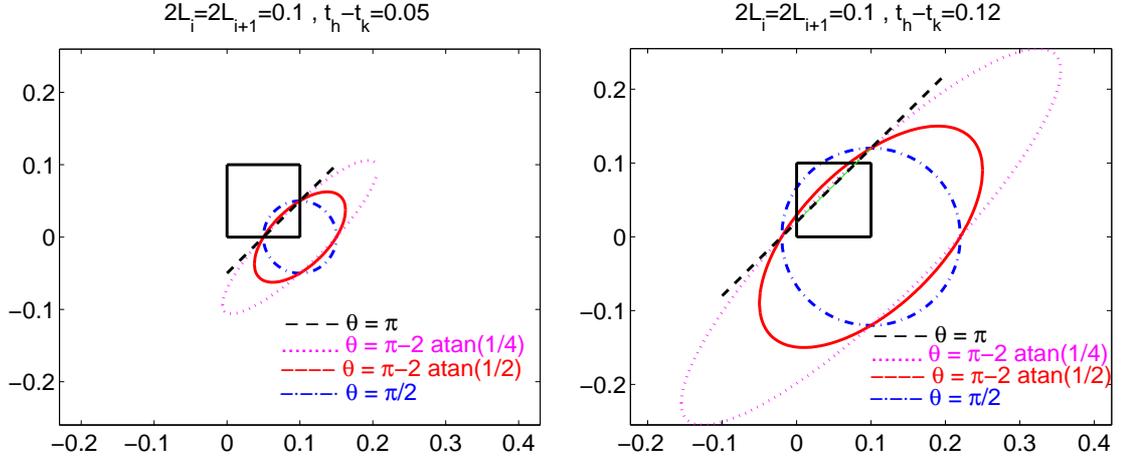


Figura 2.4.3: Il dominio di integrazione di (2.4.2) nel caso di elementi consecutivi non allineati, al variare dei parametri  $\Delta_{hk}$  e  $\theta$ , per  $c = 1$ .

Osserviamo che per qualche valore si  $s$  può accadere che  $m_s - M_s \leq 0$ ; in questo caso evitiamo il calcolo dell'integrale, essendo nullo.

Analogamente a prima, l'integrazione numerica dell'integrale esterno è stata realizzata suddividendo (eventualmente) l'intervallo di integrazione esterno. indichiamo gli spezzamenti con

$$s_1^1 = 2l_i - c \Delta_{hk}, \quad s_2^{1,2} = 2l_i + 2l_{i+1} \cos(\omega) \mp \sqrt{c^2 \Delta_{hk}^2 - (2l_{i+1})^2 \sin^2(\omega)}.$$

Per snellire le notazioni, nel seguito denoteremo con  $\ell_\omega$  la seguente quantità dipendente da  $\omega$

$$\ell_\omega := \sqrt{(2l_i)^2 + (2l_{i+1})^2 + 2(2l_i)(2l_{i+1}) \cos(\omega)}.$$

Con una analisi più approfondita, si delineano differenti casi:

- se  $0 < \omega < \pi/2$  solo  $s_2^1 \in [M_0, 2l_i]$  quando

$$\frac{2l_{i+1}}{c} < \Delta_{hk} < \frac{\ell_\omega}{c};$$

- se  $\pi/2 < \omega < \pi$  si ha invece

$$+ s_1^1 \in [M_0, 2l_i] \text{ quando } \Delta_{hk} < \frac{2l_i}{c};$$

$$+ s_2^1 \in [M_0, 2l_i]$$

- \* se  $\cos(\omega) > -2l_i/2l_{i+1}$ , quando

$$\frac{2l_{i+1} \sin(\omega)}{c} < \Delta_{hk} < \frac{\ell_\omega}{c}$$

+  $s_2^2 \in [M_0, 2l_i]$

\* se  $\cos(\omega) > -2l_i/2l_{i+1}$ , quando

$$\frac{2l_{i+1} \sin(\omega)}{c} < \Delta_{hk} < \frac{2l_{i+1}}{c};$$

\* se  $\cos(\omega) < -2l_i/2l_{i+1}$ , quando

$$\max \left\{ \frac{2l_{i+1} \sin(\omega)}{c}, \frac{\ell_\omega}{c} \right\} < \Delta_{hk} < 2l_{i+1}.$$

Osserviamo che, nel caso di mesh uniforme, è sempre verificata la condizione  $\cos(\omega) > -2l_i/2l_{i+1}$  in quanto  $2l_i/2l_{i+1} \equiv 1$ .

## ■ FORMULE DI QUADRATURA

Presentiamo brevemente i tre tipi di formule di quadratura che utilizzeremo nel seguito, elencandone brevemente le caratteristiche.

### □ Tecnica di regolarizzazione

Consideriamo un integrale della forma  $\int_0^1 f(s)ds$ , dove  $f(s)$  ha una singolarità debole agli estremi dell'intervallo di integrazione. Le classiche formule di Gauss-Legendre, molto accurate per funzioni integrande regolari, perdono la loro efficienza in presenza di singolarità.

Introduciamo un cambiamento di variabile  $\varphi : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  tale che  $\varphi'(\tilde{s}) \geq 0$ , ottenendo

$$\int_0^1 f(s)ds = \int_0^1 f(\varphi(\tilde{s}))\varphi'(\tilde{s})d\tilde{s} =: \int_0^1 F(\tilde{s})d\tilde{s}. \quad (\mathcal{Q}1)$$

Inoltre, se le derivate  $\varphi^{(i)}(0) = 0$ ,  $\varphi^{(j)}(1) = 0$  per  $i = 1, \dots, p-1$ ,  $j = 1, \dots, q-1$ , scegliendo opportunamente gli interi  $p$  e  $q$  possiamo ottenere funzioni integrande  $F(\tilde{s})$  con la regolarità desiderata. A questo punto è sensato applicare la regola di Gauss-Legendre all'integrale  $(\mathcal{Q}1)$ . La trasformazione che considereremo nel seguito è quella proposta in [29]:

$$\varphi(\tilde{s}) = \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!(q-1)!} \int_0^{\tilde{s}} u^{p-1}(1-u)^{q-1}du, \quad p, q \geq 1. \quad (2.4.8)$$

L'integrale in (2.4.8) può essere valutato efficientemente utilizzando una formula di Gauss-Legendre ad  $n$  nodi, con  $n = \lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor$ , dove col simbolo  $\lfloor \cdot \rfloor$  abbiamo indicato la parte intera inferiore.

□ **Formule prodotto**

Un'altra tipologia di formula di quadratura interpolatoria, basata sugli zeri dei polinomi di Legendre, si presenta nella forma

$$\int_{-1}^1 S(y, x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k(y) f(x_k) + R_n(f; y) \quad (\mathcal{Q}2)$$

ed è ottenuta sostituendo alla funzione  $f(x)$  il suo polinomio di Lagrange di grado  $n - 1$  costruito sugli zeri  $\{x_k\}_{k=1, \dots, n}$  del polinomio di Legendre di grado  $n$ . Per quanto riguarda i pesi, essi sono derivati nel seguente modo:

$$w_k(y) = \frac{1}{2} \lambda_k \sum_{i=0}^{n-1} (2i + 1) \mu_i(y) P_i(x_k), \quad (2.4.10)$$

dove  $\{\lambda_k\}_k$  sono gli  $n$  numeri di Christoffel associati alla classica formula di quadratura di Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k), \quad (2.4.11)$$

$\mu_i(y)$  sono i cosiddetti momenti modificati del nucleo  $S(y, x)$ , definiti dalla uguaglianza

$$\mu_i(y) = \int_{-1}^1 S(y, x) P_i(x) dx$$

e  $P_i(x)$  è il polinomio di Legendre di grado  $i$ .

I nuclei  $S(y, x)$  che prenderemo in considerazione in questo contesto sono del tipo

- $\log(|x - a_y|)$ ,  $\log[(x - a_y)^2 + b_y^2]$ , con  $b_y \neq 0$ ;
- funzioni razionali aventi a numeratore fattori del tipo  $(x - a_y)$  e denominatori del tipo  $(x - a_y)$  e  $[(x - a_y)^2 + b_y^2]$ .

Per maggiori dettagli rimandiamo a [2] e a [22].

□ **Formula di quadratura per integrali a parte finita di Hadamard (HFP)**

Essa si presenta nella forma:

$$\oint_0^1 \frac{f(s)}{s} ds = w_0^{GR} f(0) + \sum_{k=1}^n w_k^{GR} f(s_k^{GR}) + R_n^{GR}(f), \quad (\mathcal{Q}3)$$

con, per  $k = 1, \dots, n$ ,

$$s_k^{GR} = \frac{1 + x_k}{2}, \quad w_k^{GR} = \frac{\lambda_k}{2s_k} \quad w_0^{GR} = - \sum_{k=1}^n w_k^{GR},$$

dove  $x_k$  e  $\lambda_k$  sono come quelli dati in (2.4.11). Questa formula è ottenuta sostituendo ad  $f(x)$  il suo polinomio interpolatore costruito sui nodi  $\{0, s_1, \dots, s_n\}$ .

Si tratta di una formula di quadratura di tipo Gauss-Radau ed ha grado di precisione  $2n$ . Per ulteriori approfondimenti si rimanda a [28].

## ■ SCHEMI DI INTEGRAZIONE NUMERICA

Riferendoci alla espressione (2.3.6), notiamo che dobbiamo studiare il trattamento numerico di un nucleo del tipo

$$\left[ \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_x}{r^2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_\xi}{2} - \frac{\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_\xi}{2} \right] \frac{\sqrt{c^2 \Delta_{hk}^2 - r^2}}{c r^2}. \quad (2.4.13)$$

Come già osservato, quando  $r \rightarrow 0$  questo nucleo è ipersingolare ed è necessario utilizzare apposite formule di quadratura.

Vi è però anche un'altra situazione in cui bisogna prestare particolare attenzione: quando la funzione  $\sqrt{c^2 \Delta_{hk}^2 - r^2}$ , pur non essendo singolare, può assumere valori prossimi a zero e pertanto la sua derivata prima rispetto alla variabile di integrazione interna risulta singolare (ovvero la funzione presenta una *singolarità debole*). Una situazione analoga si presenta anche quando vogliamo integrare una funzione regolare per  $r \rightarrow 0$ , come ad esempio

$$\int_0^{2l_i} \tilde{w}_i^{(0)}(s) \int_{M_s}^{m_s} \log(c \Delta_{hk} + \sqrt{c^2 \Delta_{hk}^2 - r^2}) \tilde{w}_j^{(0)}(z) dz ds.$$

In questi casi, per quanto riguarda l'integrale interno utilizziamo la procedura di regolarizzazione(Q1), che ha l'effetto di concentrare i nodi agli estremi dell'intervallo e di modificare i pesi. L'integrale esterno è invece eseguito mediante la classica regola di Gauss-Legendre.

Analizziamo ora il trattamento delle ipersingolarità, che si presentano nei casi:

### □ Elementi coincidenti ( $e_j \equiv e_i$ )

In questo caso  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_x = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_\xi = 0$  e  $\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_\xi = 1$ ; ricordiamo anche che  $r = |z - s|$ .

Pertanto l'integrale di (2.4.13) si riduce alla somma di contributi del tipo

$$\mathcal{I} = -\frac{1}{2} \int_a^b \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_{M_s}^{m_s} \frac{\sqrt{c^2 \Delta_{hk}^2 - r^2}}{c (z - s)^2} \tilde{w}_j^{(d_j)}(z) dz ds, \quad (2.4.14)$$

dove l'intervallo  $[a, b] \subset [0, 2l_i]$  è determinato dagli eventuali spezzamenti assegnati in (2.4.3).

Si presentano due casi:

✠ il bordo della regione planare  $r < c \Delta_{hk}$  non è contenuto nel rettangolo  $[a, b] \times [M_s, m_s]$ , ovvero  $M_s = 0$ ,  $m_s = 2l_i$ .

Riscriviamo il doppio integrale (2.4.14) nel seguente modo:

$$\mathcal{I} = - \int_a^b \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_0^{2l_i} \frac{1}{|z-s|} \frac{\sqrt{c^2 \Delta_{hk}^2 - |z-s|^2} \tilde{w}_j^{(d_j)}(z) - \Delta_{hk} \tilde{w}_j^{(d_j)}(s)}{2c|z-s|} dz ds - \frac{\Delta_{hk}}{2} \int_a^b \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \tilde{w}_j^{(d_j)}(s) \int_0^{2l_i} \frac{1}{|z-s|^2} dz ds =: \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2.$$

◇ Per valutare numericamente  $\mathcal{I}_1$  utilizziamo:

- *Integrale esterno*: cambiamento di variabile (Q1);
- *Integrale interno*: regola prodotto (Q2) per trattare la singolarità forte del tipo  $|z-s|^{-1}$ .

Nella tabella 2.2 sono presentati gli errori relativi nel calcolo dell'integrale  $\mathcal{I}$  al variare del numero dei nodi e dei parametri  $p$  e  $q$  per l'integrale esterno.

N. Nodi	$p = q = 1$	$p = q = 2$	$p = q = 3$
16	$4.183928 \cdot 10^{-3}$	$7.371884 \cdot 10^{-5}$	$2.757167 \cdot 10^{-6}$
32	$1.075548 \cdot 10^{-3}$	$4.851512 \cdot 10^{-6}$	$6.125659 \cdot 10^{-6}$
64	$2.728950 \cdot 10^{-4}$	$2.977504 \cdot 10^{-7}$	—
128	$6.875518 \cdot 10^{-5}$	—	—

Tabella 2.2: Errore relativo nel calcolo dell'integrale  $\mathcal{I}$ . I parametri di discretizzazione considerati sono  $2l_i = 0.1$ ,  $\Delta_{hk} = 0.15$ ,  $c = 1$ ,  $d_i = d_j = 1$ . L'integrazione interna è stata realizzata con la regola prodotto ad 8 nodi.

◇ Per quanto riguarda invece  $\mathcal{I}_2$ , dopo aver calcolato analiticamente l'integrale interno, otteniamo

$$\mathcal{I}_2 = - \frac{\Delta_{hk}}{2} \int_a^b \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \tilde{w}_j^{(d_j)}(s) \left[ \frac{1}{s - sl_i} - \frac{1}{s} \right] ds =: \mathcal{I}_{2,1} + \mathcal{I}_{2,2}.$$

Se  $a = 0$  e  $b = 2l_i$ ,  $\mathcal{I}_{2,1}$  ed  $\mathcal{I}_{2,2}$  possono essere valutati con la formula di quadratura per HFP (Q3) con  $\lceil (d_i + d_j)/2 \rceil$  nodi, dove con  $\lceil \cdot \rceil$  è stata indicata la parte intera superiore; altrimenti utilizziamo per entrambi gli integrali la formula di Gauss-Legendre.

✠ il bordo della regione  $r < c \Delta_{hk}$  è contenuto nel rettangolo

$[a, b] \times [M_s, m_s]$ .

In questo caso riscriviamo l'integrale (2.4.13) come

$$\begin{aligned}
& - \int_a^b \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_{M_s}^{m_s} \frac{\sqrt{c^2 \Delta_{hk}^2 - (z-s)^2} \tilde{w}_j^{(d_j)}(z) - c \Delta_{hk} \tilde{w}_j^{(d_j)}(s) - c \Delta_{hk} \tilde{w}_j'^{(d_j)}(s)(z-s)}{2c(z-s)^2} dz ds \\
& - \frac{\Delta_{hk}}{2} \int_a^b \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \tilde{w}_j^{(d_j)}(s) \int_{M_s}^{m_s} \frac{1}{(z-s)^2} dz ds \\
& - \frac{\Delta_{hk}}{2} \int_a^b \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \tilde{w}_j'^{(d_j)}(s) \int_{M_s}^{m_s} \frac{1}{|z-s|} dz ds =: \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3.
\end{aligned}$$

◇ Per valutare numericamente  $\mathcal{I}_1$  utilizziamo:

- *Integrale esterno*: formula di Gauss-Legendre;
- *Integrale interno*: cambiamento di variabile ( $\mathcal{Q}1$ ) per il trattamento della singolarità debole.

La tabella riporta l'errore relativo nella valutazione numerica dell'integrale  $\mathcal{I}_1$  mediante la strategia appena descritta.

N. Nodi	$p = q = 1$	$p = q = 2$	$p = q = 3$
4	$1.447619 \cdot 10^{-3}$	$1.927442 \cdot 10^{-4}$	$8.049876 \cdot 10^{-4}$
8	$2.055105 \cdot 10^{-4}$	$2.589099 \cdot 10^{-6}$	$1.369531 \cdot 10^{-6}$
16	$2.779599 \cdot 10^{-5}$	$1.214525 \cdot 10^{-7}$	$1.221335 \cdot 10^{-7}$
32	$3.660121 \cdot 10^{-6}$	–	–

Tabella 2.3: Errore relativo nella valutazione dell'integrale  $\mathcal{I}_1$ , rispetto al valore  $\mathcal{I}_1 = -1.830103$  ottenuto con *Mathematica*. I parametri di discretizzazione considerati sono  $2l_i = 0.1$ ,  $\Delta_{hk} = 0.05$ ,  $c = 1$ ,  $d_i = d_j = 1$ . L'integrazione esterna è stata realizzata con la regola di Gauss-Legendre a 16 nodi.

◇ Per valutare invece  $\mathcal{I}_2$ , eseguiamo analiticamente l'integrale interno, ottenendo

$$\mathcal{I}_2 = -\frac{\Delta_{hk}}{2} \int_a^b \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \tilde{w}_j^{(d_j)}(s) \left[ \frac{1}{s-m_s} - \frac{1}{s-M_s} \right] ds =: \mathcal{I}_{2,1} + \mathcal{I}_{2,2}.$$

A questo punto,  $\mathcal{I}_{2,1}$  e  $\mathcal{I}_{2,2}$  si aprono tre casi:

- se  $m_s = 2l_i$  e  $b = 2l_i$ ,  $\mathcal{I}_{2,1}$  deve essere valutato utilizzando la formula ( $\mathcal{Q}3$ ) a  $\lceil (d_i + d_j)/2 \rceil$  nodi, mentre per  $\mathcal{I}_{2,2}$  possiamo utilizzare la formula di Gauss-Legendre a 16 nodi;
- se  $M_s = 0$  e  $a = 0$ ,  $\mathcal{I}_{2,2}$  deve essere valutato utilizzando la formula ( $\mathcal{Q}3$ ) a  $\lceil (d_i + d_j)/2 \rceil$  nodi, mentre per  $\mathcal{I}_{2,1}$  possiamo utilizzare la formula di Gauss-Legendre a 16 nodi;

- altrimenti non vi sono singolarità e possiamo utilizzare la formula di Gauss-Legendre.

◇ Per quanto riguarda  $\mathcal{I}_3$ , procediamo ancora integrando analiticamente l'integrale interno. Per l'integrale esterno, analogamente a prima, distinguiamo i casi:

- se  $m_s = 2l_i$  e  $b = 2l_i$ ,  $\mathcal{I}_{3,1}$ , a causa della singolarità debole logaritmica, deve essere valutato utilizzando la formula (Q1), mentre per  $\mathcal{I}_{3,2}$  possiamo utilizzare la formula di Gauss-Legendre;
- se  $M_s = 0$  e  $a = 0$   $\mathcal{I}_{3,2}$  deve essere valutato utilizzando la formula (Q1), mentre per  $\mathcal{I}_{3,1}$  possiamo utilizzare la formula di Gauss-Legendre;
- altrimenti non vi sono singolarità e possiamo utilizzare la formula di Gauss-Legendre.

■ **Elementi consecutivi allineati** ( $e_j \equiv e_{i+1}$ )

Osserviamo che, analogamente al caso degli elementi coincidenti,  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_x = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_\xi = 0$  e  $\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_\xi = 1$ . Inoltre ricordiamo che, in questo caso, l'unica singolarità è in  $\bar{e}_i \cap \bar{e}_{i+1}$  e  $r = z + 2l_i - s$ . Per alleggerire le notazioni, definiamo  $a_s = s - 2l_i$ .

L'integrale da calcolare si riduce pertanto a

$$\mathcal{I} = - \int_a^b \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_0^{m_s} \frac{\sqrt{c^2 \Delta_{hk}^2 - (z - a_s)^2}}{2c(z - a_s)^2} \tilde{w}_j^{(d_j)}(z) dz ds. \quad (2.4.15)$$

Analogamente a prima, distinguiamo i due casi:

✠ il bordo della regione  $r < c \Delta_{hk}$  non è contenuto nel rettangolo  $[a, b] \times [0, m_s]$ , ovvero  $m_s = 2l_{i+1}$ . Ancora si presentano due sottocasi:

✓ se  $b = 2l_i$ , si potrebbero presentare delle ipersingolarità nella funzione integranda e pertanto riscriviamo  $\mathcal{I}$  nel seguente modo:

$$\begin{aligned} & - \int_a^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_0^{2l_{i+1}} \frac{1}{(z - a_s)} \frac{c^2 \sqrt{\Delta_{hk}^2 - (z - a_s)^2} \tilde{w}_j^{(d_j)}(z) - c \Delta_{hk} \tilde{w}_j^{(d_j)}(0)}{2c(z - a_s)} dz ds \\ & - \frac{\Delta_{hk}}{2} \tilde{w}_j^{(d_j)}(0) \int_a^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_0^{m_s} \frac{1}{(z - a_s)^2} dz ds =: \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2. \end{aligned}$$

◇ Per valutare numericamente  $\mathcal{I}_1$  utilizziamo

- *Integrale esterno*: cambiamento di variabile (Q1);
- *Integrale interno*: regola prodotto (Q2) per un nucleo del tipo  $(z - a_s)^{-1}$ .

◇ Per quanto riguarda  $\mathcal{I}_2$ , dopo aver calcolato analiticamente l'integrale interno, risulta:

$$\mathcal{I}_2 = -\frac{\Delta_{hk}}{2} \tilde{w}_j^{(d_j)}(0) \int_a^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \left[ \frac{1}{2l_i - s} - \frac{1}{2l_i - s + 2l_{i+1}} \right] ds$$

$=: \mathcal{I}_{2,1} + \mathcal{I}_{2,2}.$

- Calcoliamo  $\mathcal{I}_{2,1}$  con la formula per HFP (Q3) a  $\lceil d_i/2 \rceil$  nodi;
- Calcoliamo  $\mathcal{I}_{2,2}$  con la formula di Gauss-Legendre.

✓ Quando invece il punto di singolarità non è contenuto nel dominio di integrazione, possiamo calcolare sia l'integrale esterno che quello interno di  $\mathcal{I}$  mediante la regola di Gauss-Legendre.

✕ se invece il bordo della regione  $r < c\Delta_{hk}$  è contenuto nel rettangolo  $[a, b] \times [0, m_s]$ , distinguiamo i seguenti sottocasi:

✓ se  $b = 2l_i$  riscriviamo l'integrale (2.4.15) come

$$\begin{aligned} & - \int_a^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_0^{m_s} \frac{\sqrt{c^2\Delta_{hk}^2 - (z - a_s)^2} \tilde{w}_j^{(d_j)}(z) - c\Delta_{hk}\tilde{w}_j^{(d_j)}(0) - c\Delta_{hk}\tilde{w}_j^{(d_j)}(0)z}{2c(z - a_s)^2} dz ds \\ & - \frac{\Delta_{hk}}{2} \tilde{w}_j^{(d_j)}(0) \int_a^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_0^{m_s} \frac{1}{(z - a_s)^2} dz ds \\ & - \frac{\Delta_{hk}}{2} \tilde{w}_j^{(d_j)}(0) \int_a^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_0^{m_s} \frac{z}{(z - a_s)^2} dz ds =: \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3. \end{aligned}$$

◇ Per il calcolo numerico di  $\mathcal{I}_1$  utilizziamo:

- *Integrale esterno*: regola di Gauss-Legendre;
- *Integrale interno*: cambiamento di variabile (Q1) per il trattamento della debole singolarità della radice.

◇ Per il calcolo numerico di  $\mathcal{I}_2$ , procediamo eseguendo analiticamente l'integrale interno. Così facendo otteniamo:

$$\mathcal{I}_2 = -\frac{\Delta_{hk}}{2} \tilde{w}_j^{(d_j)}(0) \int_a^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \left[ \frac{1}{2l_i - s} - \frac{1}{2l_i - s + m_s} \right] ds$$

$=: \mathcal{I}_{2,1} + \mathcal{I}_{2,2}.$

- Calcoliamo  $\mathcal{I}_{2,1}$  con la regola per HFP (Q3) a  $\lceil d_i/2 \rceil$  nodi;
- Calcoliamo  $\mathcal{I}_{2,2}$  con la formula di Gauss-Legendre.

◇ Infine, per  $\mathcal{I}_3$  procediamo analogamente a quanto fatto per  $\mathcal{I}_2$ . Integriamo analiticamente l'integrale interno ottenendo

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3 &= -\frac{\Delta_{hk}}{2} \tilde{w}_j^{(d_j)}(0) \int_a^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \left[ \frac{(m_s - a_s) \log(m_s - a_s) - m_s}{m_s - a_s} - \log(-a_s) \right] ds \\ &=: \mathcal{I}_{3,1} + \mathcal{I}_{3,2}.\end{aligned}$$

- Per calcolare  $\mathcal{I}_{3,1}$  utilizziamo la formula di Gauss-Legendre;
- Per calcolare  $\mathcal{I}_{3,2}$ , in cui compare una singolarità debole di tipo logaritmico, utilizziamo il cambiamento di variabile (Q1).

✓ Altrimenti, quando il punto di singolarità non appartiene al dominio di integrazione, calcoliamo

- *Integrale esterno*: regola di Gauss-Legendre;
- *Integrale interno*: cambiamento di variabile (Q1), per la singolarità debole della radice quadrata.

### ■ Elementi consecutivi non allineati ( $e_j \equiv e_{i+1}$ )

Ricordiamo che, in questo caso, si ha  $r = \sqrt{(2l_i - s)^2 + z^2 + 2(2l_i - s)z \cos(\omega)}$ . Per alleggerire le notazioni poniamo  $a_s := -(2l_i - s) \cos(\omega)$  e  $b_s = (2l_i - s) \sin(\omega)$ . Riscriviamo, con le opportune sostituzioni, l'integrale (2.4.13).

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= - \int_a^b \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_{M_s}^{m_s} \frac{\cos \omega}{2c} \frac{\sqrt{c^2 \Delta_{hk}^2 - ((z - a_s)^2 + b_s^2)}}{(z - a_s)^2 + b_s^2} \tilde{w}_j^{(d_j)}(z) dz ds - \\ &\int_a^b \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_{M_s}^{m_s} (b_s z \sin \omega) \frac{\sqrt{c^2 \Delta_{hk}^2 - ((z - a_s)^2 + b_s^2)}}{c((z - a_s)^2 + b_s^2)^2} \tilde{w}_j^{(d_j)}(z) dz ds \\ &=: \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2. \quad (2.4.16)\end{aligned}$$

Poichè sia  $\mathcal{I}_1$  che  $\mathcal{I}_2$  vengono calcolati in maniera analoga, nel seguito descriveremo la strategia di integrazione solo per il caso di  $\mathcal{I}_2$ .

Analogamente a quanto visto nei casi precedenti, distinguiamo innanzitutto i due casi:

✂ Il bordo della regione  $r < c \Delta_{hk}$  non è contenuto nel rettangolo  $[a, b] \times [M_s, m_s]$ , ovvero  $M_s = 0$ ,  $m_s = 2l_{i+1}$ .

✓ Se  $b = 2l_i$ , allora riscriviamo  $\mathcal{I}_2$  come

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= - \int_a^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_0^{2l_{i+1}} \frac{(b_s z \sin \omega)}{c((z - a_s)^2 + b_s^2)^2} \\ &\quad \left[ \tilde{w}_j^{(d_j)}(z) \sqrt{c^2 \Delta_{hk}^2 - ((z - a_s)^2 + b_s^2)} - c \Delta_{hk} \tilde{w}_j^{(d_j)}(0) - c \Delta_{hk} \tilde{w}_j^{\prime(d_j)}(0) z \right] dz ds \\ &\quad - \Delta_{hk} \tilde{w}_j^{(d_j)}(0) \int_a^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_0^{2l_{i+1}} \frac{z(b_s \sin \omega)}{((z - a_s)^2 + b_s^2)^2} dz ds \\ &\quad - \Delta_{hk} \tilde{w}_j^{\prime(d_j)}(0) \int_a^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_0^{2l_{i+1}} \frac{z^2(b_s \sin \omega)}{((z - a_s)^2 + b_s^2)^2} dz ds =: \mathcal{I}_2^1 + \mathcal{I}_2^2 + \mathcal{I}_2^3. \end{aligned}$$

◇ Per il calcolo di  $\mathcal{I}_{2,1}$  utilizziamo

- *Integrale esterno*: cambiamento di variabile (Q1);
- *Integrale interno*: formula prodotto (Q2) per un nucleo del tipo  $z[(z - a_s)^2 + b_s^2]^{-1}$

◇ Per il calcolo di  $\mathcal{I}_{2,2}$ , dopo aver integrato analiticamente l'integrale più interno, otteniamo

$$\mathcal{I}_2^2 = -\Delta_{hk} \sin \omega \tilde{w}_j^{(d_j)}(0) \int_a^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) [f(2l_{i+1}, s) - f(0, s)] ds,$$

dove

$$f(z, s) = \frac{1}{2b_s} \left[ \frac{z a_s - (a_s^2 + b_s^2)}{((z - a_s)^2 + b_s^2)} - \operatorname{atan}(\omega) \operatorname{atan}\left(\frac{z - a_s}{b_s}\right) \right]. \quad (2.4.17)$$

Valutiamo questo integrale con la formula per HFP (Q3).

◇ Per il calcolo di  $\mathcal{I}_{2,3}$ , dopo aver eseguito ancora analiticamente l'integrale interno, risulta

$$\mathcal{I}_{2,3} = -\Delta_{hk} \sin \omega \tilde{w}_j^{\prime(d_j)}(0) \int_a^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) [f(2l_{i+1}, s) - f(0, s)] ds$$

dove

$$f(z, s) = \frac{b_s(-a_s + z(\cos^2 \omega - \sin^2 \omega))}{2 \sin^2 \omega ((z - a_s)^2 + b_s^2)} - \frac{1}{2} \operatorname{atan}\left(\frac{z - a_s}{b_s}\right). \quad (2.4.18)$$

Eseguiamo questo integrale mediante la formula di Gauss-Legendre.

✓ altrimenti, quando cioè la singolarità non appartiene al dominio di integrazione, calcoliamo sia l'integrale interno che quello esterno mediante la formula di Gauss-Legendre.

✠ Il bordo della regione  $r < c \Delta_{hk}$  è contenuto nel rettangolo

$[a, b] \times [M_s, m_s]$ . Si presentano i seguenti sottocasi:

✓ se  $b = 2l_i$  e  $M_s = 0$  riscriviamo  $\mathcal{I}_2$  nella seguente forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2 &= - \int_a^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_0^{m_s} \frac{(b_s z \sin \omega)}{c((z - a_s)^2 + b_s^2)^2} \left[ \tilde{w}_j^{(d_j)}(z) \sqrt{c^2 \Delta_{hk}^2 - ((z - a_s)^2 + b_s^2)} \right. \\
&\quad \left. - c \Delta_{hk} \tilde{w}_j^{(d_j)}(0) - c \Delta_{hk} \tilde{w}_j^{\prime(d_j)}(0) z - \frac{z^2}{2} \left( \tilde{w}_j^{\prime\prime(d_j)}(0) \Delta_{hk} - \frac{\tilde{w}_j^{(d_j)}(0)}{\Delta_{hk}} \right) \right] dz ds \\
&\quad + \Delta_{hk} \tilde{w}_j^{(d_j)}(0) \int_a^{2l_i} -\tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_0^{m_s} \frac{z(b_s \sin \omega)}{c((z - a_s)^2 + b_s^2)^2} dz ds \\
&\quad - \Delta_{hk} \tilde{w}_j^{\prime(d_j)}(0) \int_a^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_0^{m_s} \frac{z^2(b_s \sin \omega)}{c((z - a_s)^2 + b_s^2)^2} dz ds \\
&\quad - \Delta_{hk} \left( \tilde{w}_j^{\prime\prime(d_j)}(0) \Delta_{hk} - \frac{\tilde{w}_j^{(d_j)}(0)}{\Delta_{hk}} \right) \int_a^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) \int_0^{m_s} \frac{z^3(b_s \sin \omega)}{((z - a_s)^2 + b_s^2)^2} dz ds \\
&=: \mathcal{I}_{2,1} + \mathcal{I}_{2,2} + \mathcal{I}_{2,3} + \mathcal{I}_{2,4}. \tag{2.4.19}
\end{aligned}$$

◇ Per  $\mathcal{I}_{2,1}$  utilizziamo

- *Integrale esterno*: formula di quadratura di Gauss-Legendre;
- *Integrale interno*: cambiamento di variabile (Q1) per il trattamento della singolarità debole della radice quadrata.

◇ Per  $\mathcal{I}_{2,2}$ , dopo aver eseguito analiticamente l'integrale interno, otteniamo

$$\mathcal{I}_2^2 = -\Delta_{hk} \sin \omega \tilde{w}_j^{(d_j)}(0) \int_a^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) [f(m_s, s) - f(0, s)] ds,$$

dove  $f(z, s)$  è data dalla (2.4.17). Valutiamo questo integrale mediante la formula di quadratura per HFP (Q3).

◇ Riguardo a  $\mathcal{I}_{2,3}$ , eseguiamo analiticamente l'integrale interno, ottenendo

$$\mathcal{I}_{2,3} = -\Delta_{hk} \sin \omega \tilde{w}_j^{\prime(d_j)}(0) \int_a^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) [f(m_s, s) - f(0, s)] ds,$$

dove  $f(z, s)$  è dato in (2.4.17). Viene calcolato attraverso la regola di Gauss-Legendre.

◇ Per quanto riguarda  $\mathcal{I}_{2,4}$ , dopo aver eseguito analiticamente l'integrale interno otteniamo

$$\mathcal{I}_{2,4} = -\Delta_{hk} \left( \tilde{w}_j^{\prime\prime(d_j)}(0) \Delta_{hk} - \frac{\tilde{w}_j^{(d_j)}(0)}{\Delta_{hk}} \right) \int_a^{2l_i} \tilde{w}_i^{(d_i)}(s) (b_s \sin \omega) [f(m_s, s) - f(0, s)] ds,$$

N. Nodi	$p = q = 1$	$p = q = 2$	$p = q = 3$
8	$1.051507 \cdot 10^{-3}$	$1.804700 \cdot 10^{-3}$	$2.610697 \cdot 10^{-3}$
16	$3.925552 \cdot 10^{-5}$	$3.467667 \cdot 10^{-5}$	$1.969021 \cdot 10^{-5}$
32	$2.071282 \cdot 10^{-6}$	$2.857438 \cdot 10^{-7}$	$2.749069 \cdot 10^{-8}$

Tabella 2.4: Errore relativo rispetto al valore  $\mathcal{I}_{2,1} = 6.156878 \cdot 10^{-3}$  ottenuto con *Mathematica*

dove

$$f(z, s) = \frac{1}{2} \log((z - a_s)^2 + b_s^2) + \frac{(\cos^3 \omega + 3 \sin^2 \omega \cos \omega)}{2 \sin^3 \omega} \operatorname{atan} \left( \frac{z - a_s}{b_s} \right) + \frac{a_s^4 - b_s^4 - z a_s^3 - 3 z a_s b_s^2}{2 b_s^2 ((z - a_s)^2 + b_s^2)}.$$

Calcoliamo questo integrale mediante la formula di Gauss-Legendre.

✓ Altrimenti la singolarità non appartiene al dominio di integrazione e possiamo calcoliamo  $\mathcal{I}_2$  nel seguente modo:

- *Integrale esterno*: formula di Gauss-Legendre;
- *Integrale interno*: cambiamento di variabile ( $\mathcal{Q}1$ ) per il trattamento della radice quadrata.

Nelle tabelle 2.4 e 2.5 sono riportati gli errori relativi nel calcolo dell'integrale  $\mathcal{I}_2$  come somma dei quattro integrali  $\mathcal{I}_{2,1}, \mathcal{I}_{2,2}, \mathcal{I}_{2,3}, \mathcal{I}_{2,4}$ . Si sono considerati  $\omega = \pi/2, c = 1, 2l_i = 2l_{i+1} = 0.1, \Delta_{hk} = 0.05$ .

N. nodi	$\mathcal{I}_{2,2} = 3.476736 \cdot 10^{-1}$	$\mathcal{I}_{2,3} = 2.261957 \cdot 10^{-2}$	$\mathcal{I}_{2,4} = 8.178796 \cdot 10^{-3}$
2	$1.232387 \cdot 10^{-15}$	$3.427467 \cdot 10^{-5}$	
4	—	$1.183973 \cdot 10^{-5}$	
8	—	$3.091870 \cdot 10^{-6}$	$4.801363 \cdot 10^{-4}$
16	—	—	$3.318646 \cdot 10^{-5}$
32	—	—	$2.193332 \cdot 10^{-6}$

Tabella 2.5: Errori relativi rispetto ai valori di  $\mathcal{I}_2^2, \mathcal{I}_2^3, \mathcal{I}_2^4$  ottenuti con *Mathematica*

## Capitolo 3

# Multidomini

In questo capitolo estenderemo le considerazioni svolte fino ad ora al caso dei multidomini. Dopo una breve introduzione in cui fisseremo nuove notazioni ed illustreremo alcune applicazioni che coinvolgono i multidomini, ne scriveremo le corrispondenti equazioni integrali di contorno e prenderemo in esame alcuni casi notevoli. Passeremo dunque alla formulazione debole del problema integrale e concluderemo con la fase di discretizzazione, prestando particolare attenzione alla struttura della matrice associata al problema discretizzato.

Nel nostro sviluppo seguiremo lo stesso approccio adottato in [3] per il caso ellittico, in [4] per l'equazione delle onde monodimensionale e in [26] per l'elastodinamica tridimensionale.

### 3.1 Descrizione del problema

In numerose applicazioni è necessario trattare *strutture composite*, dove le proprietà fisiche dei materiali che costituiscono il dominio sono diverse; di fatto non si opera più con un mezzo globalmente omogeneo, ma piuttosto con un mezzo costituito da zone localmente omogenee.

Nel nostro caso, le diverse proprietà fisiche dei domini considerati si ripercuotono sul fatto che le costanti che rappresentano la velocità di propagazione e la tensione sono diverse da dominio a dominio.

Per formalizzare il problema introduciamo qualche nuova definizione.

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un *multidominio*, ovvero un dominio suddiviso in un numero finito  $N > 2$  di *sottodomini*  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , aperti di  $\mathbb{R}^2$  con bordo regolare, tali che

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^N \bar{\Omega}_k,$$

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \text{se } i \neq j.$$

Definiamo *interfaccia*  $\Gamma_{ij}$  la porzione di bordo comune a due sottodomini adiacenti  $\Omega_i$  e  $\Omega_j$ . Formalmente

$$\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \neq \emptyset \quad \text{con } i \neq j.$$

Si osservi che  $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$ , ma il verso di percorrenza e il verso delle normali sull'interfaccia è opposto dipendentemente dall'ordine degli indici. Nelle considerazioni successive sarà quindi importante fissare un orientamento per le interfacce. Indicheremo con  $\Gamma_{ij}^i$  l'interfaccia vista dal dominio  $\Omega_i$ , con  $\Gamma_{ij}^j$  l'interfaccia vista dal dominio  $\Omega_j$ . L'apice verrà utilizzato, con lo stesso significato, anche per indicare le funzioni incognite sull'interfaccia.

Per riferirci alle porzioni di bordo di Dirichlet e di Neumann che appartengono ai vari sottodomini utilizzeremo la seguente notazione

$$\begin{aligned} \Gamma_u^i &= \Gamma_u \cap \partial\Omega_i, \\ \Gamma_p^i &= \Gamma_p \cap \partial\Omega_i. \end{aligned}$$

Denoteremo con  $T_i$  e  $c_i$  le costanti caratteristiche del dominio  $\Omega_i$ ; poiché la costante  $c_i$  compare anche all'interno della soluzione fondamentale (1.3.8), denoteremo brevemente con  $G_i$  la soluzione fondamentale relativa al dominio  $\Omega_i$ .

Scriviamo, in modo generale, il problema differenziale cui faremo riferimento nel seguito. Si tratta di un problema con condizioni iniziali nulle e con condizioni al contorno di tipo misto nulle per l'equazione delle onde omogenea. Come evidenziato nel capitolo 1, un problema al contorno di tipo misto si riduce ad un problema di Dirichlet nel caso in cui il bordo di Neumann sia vuoto e si riduce ad un problema di Neumann nel caso in cui il bordo di Dirichlet sia vuoto.

Consideriamo il seguente problema per  $i = 1, \dots, N$

$$\begin{cases} \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \Delta u_i(\mathbf{x}, t) = 0 & (\mathbf{x}, t) \in \Omega_i \times [0, T] =: Q_T^i \\ u_i(\mathbf{x}, 0) = (u_i)_t(\mathbf{x}, 0) = 0 & \mathbf{x} \in \Omega_i \\ u_i(\mathbf{x}, t) = \bar{u}(\mathbf{x}, t) & (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_u^i \times [0, T] =: \Sigma_T^{u_i} \\ p_i(\mathbf{x}, t) = T_i \frac{\partial u_i}{\partial n_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(\mathbf{x}, t) & (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_p^i \times [0, T] =: \Sigma_T^{p_i} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Sebbene la nostra non sia l'unica scelta possibile, imponiamo inoltre che, per  $(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_{ij} \times [0, T] =: \Sigma_T^{ij}$  e per  $i < j$ , valga

$$u_{ij}^i(\mathbf{x}, t) = u_{ij}^j(\mathbf{x}, t) =: u_{ij}(\mathbf{x}, t), \quad (3.1.2)$$

$$p_{ij}^i(\mathbf{x}, t) = T_i \frac{\partial u_{ij}^i}{\partial n_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, t) = -T_j \frac{\partial u_{ij}^j}{\partial n_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, t) =: p_{ij}(\mathbf{x}, t). \quad (3.1.3)$$

La (3.1.2) è una *condizione di continuità*, la (3.1.3) è una *condizione di equilibrio* sull'interfaccia  $\Gamma_{ij}$ .

Estenderemo al caso dei multidomini le considerazioni svolte per ricavare le equazioni integrali di contorno nel caso di un singolo dominio.

Per ora ci limitiamo ad elencare, riferendoci tipicamente al problema (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3), le incognite delle equazioni integrali di contorno:

- $u_i(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_p^i$ ;
- $p_i(\mathbf{x}, t) = T_i \partial_{n_{\mathbf{x}}} u_i(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_u^i$ ;
- $u_{ij}(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_{ij}$ , per ogni indice  $j > i$  tale che  $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$ ;
- $p_{ij}(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_{ij}^i$ , per ogni indice  $j > i$  tale che  $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$ .

Osserviamo che le condizioni (3.1.2), (3.1.3) permettono in primo luogo di ridurre il numero di incognite sull'interfaccia (basta considerare le due incognite  $u_{ij}$  e  $p_{ij}$  invece delle quattro  $u_{ij}^i$ ,  $p_{ij}^i$ ,  $u_{ij}^j$  e  $p_{ij}^j$ ) ed in secondo luogo di ricavare due ulteriori equazioni integrali di contorno su  $\Gamma_{ij}$ .

In letteratura sono presenti numerosi esempi di applicazione del metodo BEM allo studio dell'interazione fra diverse strutture.

Ad esempio, viene studiato il comportamento di una striscia di cemento armato (fondamenta) caricata con un peso costante e circondata da un terreno sia omogeneo [30] sia costituito da diversi strati [9].

Viene modellata la propagazione di onde in un terreno costituito da diversi strati geofisici sul bordo dei quali sono assegnate opportune condizioni [32], [36], [39].

Sempre in [30] viene presa in considerazione una cavità cilindrica sottoposta ad una pressione uniforme e viene esaminata la propagazione delle onde nel dominio esterno, suddiviso in due regioni concentriche.

Ulteriori applicazioni sono date dall'accoppiamento, su sottodomini diversi, del metodo BEM e del metodo FEM, al fine di sfruttare i noti vantaggi dell'uno e dell'altro metodo [27]. Tipicamente si tratta di domini suddivisi in una porzione limitata (la struttura), trattata con il metodo FEM, ed una illimitata (il suolo in cui è immersa), trattata col metodo BEM. In questo modo è possibile analizzare, ad esempio, la propagazione e la diffrazione di onde sismiche [34], [41].

## 3.2 Equazioni integrali per multidomini

### 3.2.1 Il caso del bidominio

Consideriamo il caso in cui  $\Omega$  è diviso in due sottodomini  $\Omega_1$  ed  $\Omega_2$ . Indicheremo l'unica interfaccia  $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$  con  $\Gamma_I$ .

#### ■ PROBLEMA MISTO INTERNO

Sono assegnati  $u(\mathbf{x}, t) = \bar{u}(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_u$  e  $p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_p$  (figura 3.2.1).

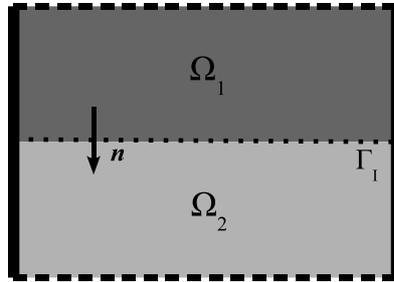


Figura 3.2.1: Striscia costituita da due sottodomini. Si è indicato il bordo di Dirichlet con la linea continua, il bordo di Neumann con la linea tratteggiata più spessa, l'interfaccia col tratteggio più fine.

Pertanto le incognite del problema sono:

- $u_1(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_p^1$ ,
- $p_1(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_u^1$ ,
- $u_2(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_p^2$ ,
- $p_2(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_u^2$ ,
- $u_I(\mathbf{x}, t) = u_I^1(\mathbf{x}, t) = u_I^2(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_I$ ,
- $p_I(\mathbf{x}, t) = p_I^1(\mathbf{x}, t) = -p_I^2(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_I$ .

Scriviamo la prima equazione di  $(\mathcal{M}i)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_u^1$ , lasciando a primo membro gli integrali opportunamente suddivisi nelle varie porzioni di bordo e portando a secondo membro le funzioni note.

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Gamma_u^1} \frac{1}{T_1} G_1(r, t, \tau) p_1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_I^1} \frac{1}{T_1} G_1(r, t, \tau) p_I^1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_p^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_I^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_I^1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = \\
& = \frac{1}{2} \bar{u}(\mathbf{x}, t) - \int_0^t \int_{\Gamma_p^1} \frac{1}{T_1} G_1(r, t, \tau) \bar{p}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_u^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) \bar{u}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau.
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Scriviamo la seconda equazione di  $(\mathcal{M}i)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_p^1$ .

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \int_{\Gamma_u^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_I^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_I^1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_p^1} T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_I^1} T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_I^1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = \\
& = -\frac{1}{2} \bar{p}(\mathbf{x}, t) + \int_0^t \int_{\Gamma_p^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) \bar{p}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_u^1} T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) \bar{u}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Procediamo in modo analogo e scriviamo le equazioni di  $(\mathcal{M}i)$  per il secondo sottodominio. Per  $\mathbf{x} \in \Gamma_u^2$  si ha

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Gamma_u^2} \frac{1}{T_2} G_2(r, t, \tau) p_2(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_I^2} \frac{1}{T_2} G_2(r, t, \tau) p_I^2(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_p^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_2(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_I^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_I^2(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = \\
& = \frac{1}{2} \bar{u}(\mathbf{x}, t) - \int_0^t \int_{\Gamma_p^2} \frac{1}{T_2} G_2(r, t, \tau) \bar{p}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_u^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) \bar{u}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau.
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Per  $x \in \Gamma_p^2$  si ha

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \int_{\Gamma_u^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_2(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_I^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_I^2(\xi, \tau) d\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_p^2} T_2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_2(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_I^2} T_2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_I^2(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = \\
& = -\frac{1}{2} \bar{p}(\mathbf{x}, t) + \int_0^t \int_{\Gamma_p^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) \bar{p}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_u^2} T_2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) \bar{u}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau.
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Per alleggerire le notazioni, nel seguito porremo

$$\begin{aligned} f_u^i(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2}\bar{u}(\mathbf{x}, t) - \int_0^t \int_{\Gamma_p^i} \frac{1}{T_i} G_i(r, t, \tau) \bar{p}(\xi, \tau) d\xi d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_{\Gamma_u^i} \frac{\partial G_i}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) \bar{u}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau, \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

$$\begin{aligned} f_p^i(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{2}\bar{p}(\mathbf{x}, t) + \int_0^t \int_{\Gamma_p^i} \frac{\partial G_i}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) \bar{p}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\ &- \int_0^t \int_{\Gamma_u^i} T_i \frac{\partial^2 G_i}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) \bar{u}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

A questo punto sfruttiamo le condizioni (3.1.2) e (3.1.3) allo scopo di ridurre le incognite sull'interfaccia alle sole  $u_I$  e  $p_I$ . Riscriviamo quindi le equazioni appena ricavate in maniera compatta

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Gamma_u^1} \frac{1}{T_1} G_1 p_1 d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_I^1} \frac{1}{T_1} G_1 p_I d\gamma_\xi d\tau + \\ - \int_0^t \int_{\Gamma_p^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_\xi} u_1 d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_I^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_\xi} u_I d\gamma_\xi d\tau = f_u^1(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

$$\begin{aligned} - \int_0^t \int_{\Gamma_u^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}} p_1 d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_I^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}} p_I d\gamma_\xi d\tau + \\ + \int_0^t \int_{\Gamma_p^1} T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi} u_1 d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_I^1} T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi} u_I d\gamma_\xi d\tau = f_p^1(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Gamma_u^2} \frac{1}{T_2} G_2 p_2 d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_I^2} \frac{1}{T_2} G_2 p_I d\gamma_\xi d\tau + \\ - \int_0^t \int_{\Gamma_p^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_\xi} u_2 d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_I^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_\xi} u_I d\gamma_\xi d\tau = f_u^2(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

$$\begin{aligned} - \int_0^t \int_{\Gamma_u^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_{\mathbf{x}}} p_2 d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_I^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_{\mathbf{x}}} p_I d\gamma_\xi d\tau + \\ + \int_0^t \int_{\Gamma_p^2} T_2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi} u_2 d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_I^2} T_2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi} u_I d\gamma_\xi d\tau = f_p^2(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Per completare la formulazione integrale del problema relativo al bidominio dobbiamo scrivere ancora due equazioni, che ricaviamo dalle condizioni di

compatibilità delle incognite sulla interfaccia (3.1.2), (3.1.3). Scriviamo la prima equazione di  $(\mathcal{M}i)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_I^i$ ,  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_I^i(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \int_{\Gamma_u^i} \frac{1}{T_i} G_i(r, t, \tau) p_i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_I^i} \frac{1}{T_i} G_i(r, t, \tau) p_I^i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\ &- \int_0^t \int_{\Gamma_p^i} \frac{\partial G_i}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_I^i} \frac{\partial G_i}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_I^i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_{\Gamma_p^i} \frac{1}{T_i} G_i(r, t, \tau) \bar{p}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_u^i} \frac{\partial G_i}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) \bar{u}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Sempre per  $\mathbf{x} \in \Gamma_I^i$ ,  $i = 1, 2$ , scriviamo la seconda equazione di  $(\mathcal{M}i)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}p_I^i(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \int_{\Gamma_u^i} \frac{\partial G_i}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_I^i} \frac{\partial G_i}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_I^i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\ &- \int_0^t \int_{\Gamma_p^i} T_i \frac{\partial^2 G_i}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_I^i} T_i \frac{\partial^2 G_i}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_I^i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_{\Gamma_p^i} \frac{\partial G_i}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) \bar{p}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_u^i} T_i \frac{\partial^2 G_i}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) \bar{u}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Prima di procedere è necessario definire univocamente la normale sull'interfaccia  $\Gamma_I$ . Infatti la normale su  $\Gamma_I^1$  e quella su  $\Gamma_I^2$  hanno verso opposto. Fissiamo come positivo il verso della normale su  $\Gamma_I^1$ , cioè la normale uscente dal sottodominio  $\Omega_1$  ed entrante in  $\Omega_2$ .

Sviluppando i calcoli successivi dovremo dunque prestare particolare attenzione ai segni che assumono le derivate normali sull'interfaccia  $\Gamma_I$  così orientata. Tipicamente le situazioni che si presentano sono le seguenti

- $p_I^2(\xi, \tau) = -p_I^1(\xi, \tau)$ , direttamente da (3.1.3);
- $\frac{\partial}{\partial n_\xi} \Big|_{\xi \in \Gamma_I^1} = -\frac{\partial}{\partial n_\xi} \Big|_{\xi \in \Gamma_I^2}$ , quando la variabile di integrazione  $\xi$  appartiene all'interfaccia;
- $\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{x}}} \Big|_{\mathbf{x} \in \Gamma_I^1} = -\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{x}}} \Big|_{\mathbf{x} \in \Gamma_I^2}$ , quando la variabile esterna  $\mathbf{x}$  appartiene all'interfaccia.

Per alleggerire la scrittura introduciamo, per  $i = 1, 2$  la seguente notazione

$$f_{u_I}^i(\mathbf{x}, t) = - \int_0^t \int_{\Gamma_p^i} \frac{1}{T_i} G_i(r, t, \tau) \bar{p}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_u^i} \frac{\partial G_i}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) \bar{u}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau, \quad (3.2.13)$$

$$f_{p_I}^i(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\Gamma_p^i} \frac{\partial G_i}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) \bar{p}(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_u^i} T_i \frac{\partial^2 G_i}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_{\xi}}(r, t, \tau) \bar{u}(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau. \quad (3.2.14)$$

Imponiamo la condizione di continuità (3.1.2) sottraendo membro a membro l'equazione (3.2.11) scritta per  $i = 1$  e per  $i = 2$ . Tenendo presenti le considerazioni appena esposte otteniamo

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Gamma_u^1} \frac{1}{T_1} G_1(r, t, \tau) p_1(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_p^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_{\xi}}(r, t, \tau) u_1(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau + \\ & - \int_0^t \int_{\Gamma_u^2} \frac{1}{T_2} G_2(r, t, \tau) p_2(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_{\xi}}(r, t, \tau) u_2(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Gamma_I} \left[ \frac{1}{T_1} G_1 + \frac{1}{T_2} G_2 \right] (r, t, \tau) p_I(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau + \\ & - \int_0^t \int_{\Gamma_I^2} \left[ \frac{\partial G_1}{\partial n_{\xi}} + \frac{\partial G_2}{\partial n_{\xi}} \right] (r, t, \tau) u_I(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau = f_{u_I}^1(\mathbf{x}, t) - f_{u_I}^2(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Analogamente, imponiamo la condizione di equilibrio (3.1.3) sommando membro a membro l'equazione (3.2.12) scritta per  $i = 1$  e per  $i = 2$ . Cambiando infine di segno otteniamo

$$\begin{aligned} & - \int_0^t \int_{\Gamma_u^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_1(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p^1} T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_{\xi}}(r, t, \tau) u_1(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau + \\ & - \int_0^t \int_{\Gamma_u^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_2(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p^2} T_2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_{\xi}}(r, t, \tau) u_2(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau + \\ & - \int_0^t \int_{\Gamma_I} \left[ \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}} + \frac{\partial G_2}{\partial n_{\mathbf{x}}} \right] (r, t, \tau) p_I(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Gamma_I^2} \left[ T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_{\xi}} + T_2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_{\xi}} \right] (r, t, \tau) u_I(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau = \\ & = f_{p_I}^1(\mathbf{x}, t) + f_{p_I}^2(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

## ■ PROBLEMA DI NEUMANN ESTERNO

Supponiamo ora di trattare un bidominio ad inclusione. La situazione tipica è quella in cui si considera l'esterno di una cavità suddiviso in due sottodomini concentrici (figura 3.2.2).

Le incognite del problema sono:

- $u_1(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_p$ ,
- $u_I(\mathbf{x}, t) = u_I^1(\mathbf{x}, t) = u_I^2(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_I$ ,
- $p_I(\mathbf{x}, t) = p_I^1(\mathbf{x}, t) = -p_I^2(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_I$ .

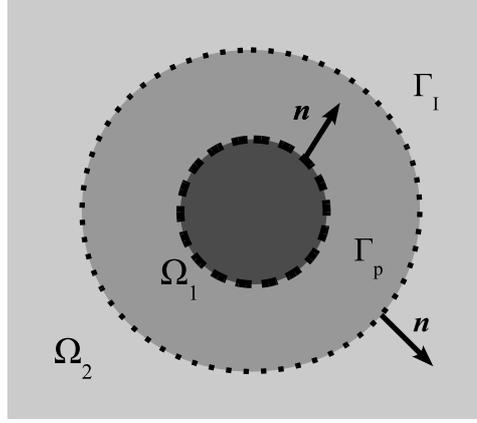


Figura 3.2.2: Bidominio ad inclusione. Il dominio del problema è la porzione di piano complementare al cerchio centrale. I due sottodomini sono la corona circolare e la parte esterna illimitata. Si noti che in questo caso il bordo del secondo sottodominio coincide con l'interfaccia.

Ricaviamo la prima equazione integrale del nostro sistema dalla seconda di  $(Me)$ . Per  $\mathbf{x} \in \Gamma_p$  si ha

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Gamma_p} T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_{\xi}}(r, t, \tau) u_1(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_I^1} T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_{\xi}}(r, t, \tau) u_I(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau + \\ & - \int_0^t \int_{\Gamma_I^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_I(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau = \frac{1}{2} \bar{p}(\mathbf{x}, t) + \int_0^t \int_{\Gamma_p} \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}}(\xi, \tau) \bar{p}(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Per  $\mathbf{x} \in \Gamma_I$ , imponiamo le condizioni di continuità e di equilibrio procedendo in modo analogo al caso del problema misto. Otteniamo così le rimanenti equazioni integrali

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Gamma_p} \frac{\partial G_1}{\partial n_{\xi}}(r, t, \tau) u_1(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_I^1} \left[ \frac{1}{T_1} G_1 + \frac{1}{T_2} G_2 \right](r, t, \tau) p_I(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Gamma_I^2} \left[ \frac{\partial G_1}{\partial n_{\xi}} + \frac{\partial G_2}{\partial n_{\xi}} \right](r, t, \tau) u_I(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau = \\ & = \int_0^t \int_{\Gamma_p} \frac{1}{T_1} G_1(r, t, \tau) \bar{p}(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau, \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \int_{\Gamma_p} T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_{\xi}}(r, t, \tau) u_1(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_I^1} \left[ \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}} + \frac{\partial G_2}{\partial n_{\mathbf{x}}} \right] (r, t, \tau) p_I(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_I^2} \left[ T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_{\xi}} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_{\xi}} \right] (r, t, \tau) u_I(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau = \\
& = - \int_0^t \int_{\Gamma_p} \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) \bar{p}(\xi, \tau) d\gamma_{\xi} d\tau. \quad (3.2.19)
\end{aligned}$$

### 3.2.2 Il caso del tridominio

Consideriamo il caso in cui  $\Omega$  è diviso in tre sottodomini  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ .

Trattiamo il caso più generale possibile: un problema misto (interno), in cui tutte le porzioni di bordo  $\Gamma_u^i, \Gamma_p^i$  per  $i = 1, 2, 3$  e tutte le interfacce  $\Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \Gamma_{23}$  sono non vuote (figura 3.2.3). Quando verranno esaminati particolari problemi, sarà sufficiente annullare opportuni contributi presenti nel caso generale.

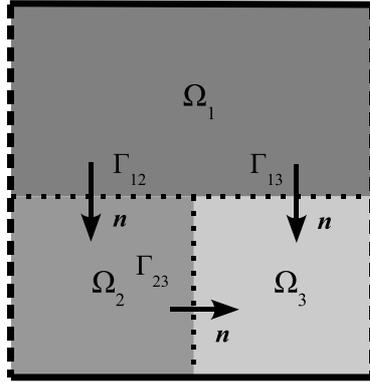


Figura 3.2.3: Multidominio costituito da tre sottodomini adiacenti. Tutte interfacce  $\Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \Gamma_{23}$  (indicate con il tratteggio più fine) sono non vuote. Inoltre tutti i sottodomini possiedono una parte di bordo di Dirichlet (linea continua) e una parte di bordo di Neumann (tratteggio meno fine).

Le incognite del problema sono:

- $u_1(\mathbf{x}, t)$  su  $\Gamma_p^1$ ,  $u_2(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_p^2$ ,  $u_3(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_p^3$ ;
- $p_1(\mathbf{x}, t)$  su  $\Gamma_u^1$ ,  $p_2(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_u^2$ ,  $p_3(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_u^3$ ;
- $u_{12}(\mathbf{x}, t) = u_{12}^1(\mathbf{x}, t) = u_{12}^2(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_{12}$ ;
- $p_{12}(\mathbf{x}, t) = p_{12}^1(\mathbf{x}, t) = -p_{12}^2(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_{12}$ ;
- $u_{13}(\mathbf{x}, t) = u_{13}^1(\mathbf{x}, t) = u_{13}^3(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_{13}$ ;
- $p_{13}(\mathbf{x}, t) = p_{13}^1(\mathbf{x}, t) = -p_{13}^3(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_{13}$ ;
- $u_{23}(\mathbf{x}, t) = u_{23}^2(\mathbf{x}, t) = u_{23}^3(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_{23}$ ;
- $p_{23}(\mathbf{x}, t) = p_{23}^2(\mathbf{x}, t) = -p_{23}^3(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_{23}$ .

Procedendo in modo analogo al caso del bidominio, ricaviamo per esteso le equazioni del sistema.

Scriviamo la prima equazione di  $(\mathcal{M}i)$  per  $\mathbf{x} \in \Gamma_u^1$ . Tenendo conto delle relazioni (3.1.2) e (3.1.3) essa risulta

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Gamma_u^1} \frac{1}{T_1} G_1(r, t, \tau) p_1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_p^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^1} \frac{1}{T_1} G_1(r, t, \tau) p_{12}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{12}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^1} \frac{1}{T_1} G_1(r, t, \tau) p_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = \\
& = f_u^1(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.20)
\end{aligned}$$

Scriviamo la seconda equazione di  $(\mathcal{M}i)$  per  $x \in \Gamma_p^1$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \int_{\Gamma_u^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p^1} T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_{12}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^1} T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{12}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^1} T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = \\
& = f_p^1(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.21)
\end{aligned}$$

Analogamente, otteniamo le seguenti equazioni rispettivamente per  $\mathbf{x} \in \Gamma_u^2$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma_p^2$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma_u^3$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma_p^3$ .

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Gamma_u^2} \frac{1}{T_2} G_2(r, t, \tau) p_2(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_p^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_2(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^2} \frac{1}{T_2} G_2(r, t, \tau) p_{12}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{12}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^2} \frac{1}{T_2} G_2(r, t, \tau) p_{23}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{23}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = \\
& = f_u^2(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \int_{\Gamma_u^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_2(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p^2} T_2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_2(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_{12}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^2} T_2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{12}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_{23}(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^2} T_2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{23}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = \\
& = f_p^2(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Gamma_u^3} \frac{1}{T_3} G_3(r, t, \tau) p_3(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_p^3} \frac{\partial G_3}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_3(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^3} \frac{1}{T_3} G_3(r, t, \tau) p_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^3} \frac{\partial G_3}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^3} \frac{1}{T_3} G_3(r, t, \tau) p_{23}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^3} \frac{\partial G_3}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{23}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = \\
& = f_u^3(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \int_{\Gamma_u^3} \frac{\partial G_3}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_3(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p^3} T_3 \frac{\partial^2 G_3}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_3(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^3} \frac{\partial G_3}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^3} T_3 \frac{\partial^2 G_3}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^3} \frac{\partial G_3}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_{23}(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^3} T_3 \frac{\partial^2 G_3}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{23}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = \\
& = f_p^3(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.25)
\end{aligned}$$

Procedendo sempre in modo analogo al bidominio, scriviamo le equazioni nel caso in cui la variabile  $\mathbf{x}$  appartenga all'interfaccia. Sottraiamo alla prima equazione di  $(Mi)$  scritta per  $\mathbf{x} \in \Gamma_{12}^1$  la stessa scritta per  $\mathbf{x} \in \Gamma_{12}^2$ . I simboli utilizzati per indicare i termini noti sono un'ovvia estensione di quelli introdotti in (3.2.13) e (3.2.14).

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Gamma_u^1} \frac{1}{T_1} G_1(r, t, \tau) p_1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_p^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_u^2} \frac{1}{T_2} G_2(r, t, \tau) p_2(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_2(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^1} \left[ \frac{1}{T_1} G_1 + \frac{1}{T_2} G_2 \right] (r, t, \tau) p_{12}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& \quad - \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^2} \left[ \frac{\partial G_1}{\partial n_\xi} + \frac{\partial G_2}{\partial n_\xi} \right] (r, t, \tau) u_{12}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^1} \frac{1}{T_1} G_1(r, t, \tau) p_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^2} \frac{1}{T_2} G_2(r, t, \tau) p_{23}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{23}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = \\
& \quad = f_{u_{12}}^1(\mathbf{x}, t) - f_{u_{12}}^2(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.26)
\end{aligned}$$

Sommiamo alla seconda equazione di  $(\mathcal{M}i)$  scritta per  $\mathbf{x} \in \Gamma_{12}^1$  la stessa scritta per  $\mathbf{x} \in \Gamma_{12}^2$ .

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \int_{\Gamma_u^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p^1} T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_u^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_2(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p^2} T_2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_2(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^1} \left[ \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}} + \frac{\partial G_2}{\partial n_{\mathbf{x}}} \right] (r, t, \tau) p_{12}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& \quad + \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^2} \left[ T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi} + T_2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi} \right] (r, t, \tau) u_{12}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^1} T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_{23}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^2} T_2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{23}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = \\
& \quad = f_{p_{12}}^1(\mathbf{x}, t) + f_{p_{12}}^2(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.27)
\end{aligned}$$

Ripetendo gli stessi passaggi per  $\mathbf{x} \in \Gamma_{13}$  e  $\mathbf{x} \in \Gamma_{23}$  si ottengono le rimanenti quattro equazioni

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Gamma_u^1} \frac{1}{T_1} G_1(r, t, \tau) p_1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_p^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_u^3} \frac{1}{T_3} G_3(r, t, \tau) p_3(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p^3} \frac{\partial G_3}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_3(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^1} \left[ \frac{1}{T_1} G_1 + \frac{1}{T_3} G_3 \right] (r, t, \tau) p_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau \\
& \quad - \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^3} \left[ \frac{\partial G_1}{\partial n_\xi} + \frac{\partial G_3}{\partial n_\xi} \right] (r, t, \tau) u_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^1} \frac{1}{T_1} G_1(r, t, \tau) p_{12}(\xi, \tau) d\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{12}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^3} \frac{1}{T_3} G_3(r, t, \tau) p_{23}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^3} \frac{\partial G_3}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{23}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = \\
& \quad = f_{u_{13}}^1(\mathbf{x}, t) - f_{u_{13}}^3(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \int_{\Gamma_u^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p^1} T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_1(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_u^3} \frac{\partial G_3}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_3(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p^3} T_3 \frac{\partial^2 G_3}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_3(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^1} \left[ \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}} + \frac{\partial G_3}{\partial n_{\mathbf{x}}} \right] (r, t, \tau) p_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& \quad + \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^3} \left[ T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi} + T_3 \frac{\partial^2 G_3}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi} \right] (r, t, \tau) u_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^1} \frac{\partial G_1}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_{12}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^1} T_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{12}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^3} \frac{\partial G_3}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_{23}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^3} T_3 \frac{\partial^2 G_3}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{23}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = \\
& \quad = f_{p_{13}}^1(\mathbf{x}, t) + f_{p_{13}}^3(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Gamma_u^2} \frac{1}{T_2} G_2(r, t, \tau) p_2(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_p^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_2(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_u^3} \frac{1}{T_3} G_3(r, t, \tau) p_3(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p^3} \frac{\partial G_3}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_3(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^2} \left[ \frac{1}{T_2} G_2 + \frac{1}{T_3} G_3 \right] (r, t, \tau) p_{23}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& \quad - \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^3} \left[ \frac{\partial G_2}{\partial n_\xi} + \frac{\partial G_3}{\partial n_\xi} \right] (r, t, \tau) u_{23}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^2} \frac{1}{T_2} G_2(r, t, \tau) p_{12}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{12}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^3} \frac{1}{T_3} G_3(r, t, \tau) p_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^3} \frac{\partial G_3}{\partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = \\
& \quad = f_{u_{23}}^2(\mathbf{x}, t) - f_{u_{23}}^3(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \int_{\Gamma_u^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_2(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p^2} T_2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_2(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_u^3} \frac{\partial G_3}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_3(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p^3} T_3 \frac{\partial^2 G_3}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_3(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^2} \left[ \frac{\partial G_2}{\partial n_{\mathbf{x}}} + \frac{\partial G_3}{\partial n_{\mathbf{x}}} \right] (r, t, \tau) p_{23}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& \quad + \int_0^t \int_{\Gamma_{23}^3} \left[ T_2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi} + T_3 \frac{\partial^2 G_3}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi} \right] (r, t, \tau) u_{23}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^2} \frac{\partial G_2}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_{12}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{12}^2} T_2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{12}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^3} \frac{\partial G_3}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{13}^3} T_3 \frac{\partial^2 G_3}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi}(r, t, \tau) u_{13}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau = \\
& \quad = f_{p_{23}}^2(\mathbf{x}, t) + f_{p_{23}}^3(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.31)
\end{aligned}$$

### 3.2.3 Generalizzazione

Generalizziamo le considerazioni precedenti ad un dominio suddiviso in un numero arbitrario  $n$  di sottodomini.

Se il sottodominio  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  è tale che  $\Gamma_u^i \neq \emptyset$  e  $\Gamma_p^i \neq \emptyset$ , possiamo scrivere la seguente coppia di equazioni integrali di contorno. Per  $\mathbf{x} \in \Gamma_u^i$  otteniamo

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Gamma_u^i} \frac{1}{T_i} G_i(r, t, \tau) p_i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_p^i} \frac{\partial G_i}{\partial n_\xi} u_i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\ & + \sum_{\substack{k \neq i \\ \Gamma_{ik} \neq \emptyset}} \left[ \int_0^t \int_{\Gamma_{ik}^i} \frac{1}{T_i} G_i(r, t, \tau) p_{ik}^i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_{ik}^i} \frac{\partial G_i}{\partial n_\xi} u_{ik}^i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau \right] = \\ & = f_u^i(\mathbf{x}, t). \quad (3.2.32) \end{aligned}$$

Per  $\mathbf{x} \in \Gamma_p^i$  otteniamo

$$\begin{aligned} & - \int_0^t \int_{\Gamma_u^i} \frac{\partial G_i}{\partial n_{\mathbf{x}}} (r, t, \tau) p_i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p^i} T_i \frac{\partial^2 G_i}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi} u_i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\ & + \sum_{\substack{k \neq i \\ \Gamma_{ik} \neq \emptyset}} \left[ - \int_0^t \int_{\Gamma_{ik}^i} \frac{\partial G_i}{\partial n_{\mathbf{x}}} (r, t, \tau) p_{ik}^i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{ik}^i} T_i \frac{\partial^2 G_i}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi} u_{ik}^i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau \right] = \\ & = f_p^i(\mathbf{x}, t). \quad (3.2.33) \end{aligned}$$

Sull'interfaccia  $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$ , con  $i < j$ , imponiamo le condizioni (3.1.2) e (3.1.3) ed otteniamo le seguenti due equazioni

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Gamma_u^i} \frac{1}{T_i} G_i(r, t, \tau) p_i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_p^i} \frac{\partial G_i}{\partial n_\xi} u_i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\ & \quad - \int_0^t \int_{\Gamma_u^j} \frac{1}{T_j} G_j(r, t, \tau) p_j(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p^j} \frac{\partial G_j}{\partial n_\xi} u_j(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Gamma_{ij}^i} \left[ \frac{1}{T_i} G_i + \frac{1}{T_j} G_j \right] (r, t, \tau) p_{ij}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\ & \quad - \int_0^t \int_{\Gamma_{ij}^j} \left[ \frac{\partial G_i}{\partial n_\xi} + \frac{\partial G_j}{\partial n_\xi} \right] (r, t, \tau) u_{ij}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\ & + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ \Gamma_{ik} \neq \emptyset}} \left[ \int_0^t \int_{\Gamma_{ik}^i} \frac{1}{T_i} G_i(r, t, \tau) p_{ik}^i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_{ik}^i} \frac{\partial G_i}{\partial n_\xi} u_{ik}^i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau \right] + \\ & - \sum_{\substack{k \neq i, j \\ \Gamma_{jk} \neq \emptyset}} \left[ \int_0^t \int_{\Gamma_{jk}^j} \frac{1}{T_j} G_j(r, t, \tau) p_{jk}^j(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma_{jk}^j} \frac{\partial G_j}{\partial n_\xi} u_{jk}^j(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau \right] = \\ & = f_{u_{ij}}^i(\mathbf{x}, t) - f_{u_{ij}}^j(\mathbf{x}, t) =: t_u^{ij}(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \int_{\Gamma_u^i} \frac{\partial G_i}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p^i} T_i \frac{\partial^2 G_i}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi} u_i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_u^j} \frac{\partial G_j}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_j(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_p^j} T_j \frac{\partial^2 G_j}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi} u_j(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& - \int_0^t \int_{\Gamma_{ij}^i} \left[ \frac{\partial G_i}{\partial n_{\mathbf{x}}} + \frac{\partial G_j}{\partial n_{\mathbf{x}}} \right] (r, t, \tau) p_{ij}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& \quad + \int_0^t \int_{\Gamma_{ij}^j} \left[ T_i \frac{\partial^2 G_i}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi} + T_j \frac{\partial^2 G_j}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi} \right] (r, t, \tau) u_{ij}(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \\
& + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ \Gamma_{ik} \neq \emptyset}} \left[ - \int_0^t \int_{\Gamma_{ik}^i} \frac{\partial G_i}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_{ik}^i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{ik}^i} T_i \frac{\partial^2 G_i}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi} u_{ik}^i(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau \right] + \\
& + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ \Gamma_{jk} \neq \emptyset}} \left[ - \int_0^t \int_{\Gamma_{jk}^j} \frac{\partial G_j}{\partial n_{\mathbf{x}}}(r, t, \tau) p_{jk}^j(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{jk}^j} T_j \frac{\partial^2 G_j}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_\xi} u_{jk}^j(\xi, \tau) d\gamma_\xi d\tau \right] = \\
& = f_{p_{ij}}^i(\mathbf{x}, t) + f_{p_{ij}}^j(\mathbf{x}, t) =: t_{p_{ij}}^{ij}. \quad (3.2.35)
\end{aligned}$$

### 3.3 Formulazione debole e discretizzazione

Generalizziamo quanto descritto nel Capitolo 2 al caso di un arbitrario multidominio. Anche le notazioni che adotteremo saranno una naturale estensione di quelle ivi introdotte.

Sia  $\Omega$  un multidominio costituito da  $n$  sottodomini  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Fissiamo arbitrariamente un indice  $i \in \{1, \dots, n\}$  e supponiamo che  $\Gamma_u^i \neq \emptyset$  e  $\Gamma_p^i \neq \emptyset$ .

Dobbiamo innanzitutto scrivere la formulazione debole per le equazioni integrali (3.2.32) - (3.2.35). In accordo con quanto fatto nel caso di un monodominio, scegliamo la formulazione debole energetica, basata sull'identità (2.1.1).

Ricordiamo che la prima equazione (3.2.32) è stata scritta a partire da una formula di rappresentazione per lo spostamento  $u_i$ . Pertanto deriviamo rispetto al tempo  $t$  ambo i membri, moltiplichiamo per una funzione test  $\psi^i$  appartenente allo stesso spazio funzionale di  $p_i$  ed infine integriamo su  $\Sigma_T^{u_i}$ . La seconda equazione (3.2.33) proviene invece da una formula di rappresentazione per la derivata normale dello spostamento. Pertanto, in questo caso, moltiplichiamo entrambi i membri per  $(\eta^i)_t$ , derivata temporale di una funzione test  $\eta^i$  appartenente allo stesso spazio funzionale di  $u_i$ . Integriamo poi ambo i membri su  $\Sigma_T^{p_i}$ .

Fissiamo anche un indice  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i < j$  tale che  $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$ . Consideriamo quindi le equazioni scritte sull'interfaccia  $\Gamma_{ij}$ : la prima di esse proviene da una formula di rappresentazione per  $u_{ij}$ , la seconda per  $p_{ij}$ . Procedendo analogamente a prima, deriviamo la (3.2.34) rispetto al tempo, moltiplichiamo

mo per una funzione test  $\psi^{ij}$  appartenente allo stesso spazio funzionale di  $p_{ij}$  e integriamo su  $\Sigma_T^{ij}$ . Moltiplichiamo la (3.2.35) per  $(\eta^{ij})_t$ , derivata temporale di una funzione test  $\eta^{ij}$  appartenente allo stesso spazio funzionale di  $u_{ij}$  e integriamo su  $\Sigma_T^{ij}$ .

Per una maggiore chiarezza riscriviamo in modo compatto il sistema risultante dalla formulazione debole energetica.

Le notazioni utilizzate generalizzano quelle di (2.1.4). Per alleggerire la scrittura indichiamo con  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma_T^{u_i}}$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma_T^{p_i}}$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma_T^{ij}}$  rispettivamente il prodotto scalare in  $L^2(\Sigma_T^{u_i})$ ,  $L^2(\Sigma_T^{p_i})$ ,  $L^2(\Sigma_T^{ij})$ .

$$\left\{ \begin{aligned}
& \langle (V_i p_i)_t, \psi^i \rangle_{\Sigma_T^{u_i}} - \langle (K_i u_i)_t, \psi^i \rangle_{\Sigma_T^{u_i}} + \sum_{\substack{k \neq i \\ \Gamma_{ik} \neq \emptyset}} \langle (V_i p_{ik}^i - K_i u_{ik}^i)_t, \psi^i \rangle_{\Sigma_T^{u_i}} = \\
& \hspace{20em} = \langle (f_u^i)_t, \psi^i \rangle_{\Sigma_T^{u_i}} \\
& - \langle K_i' p_i, (\eta^i)_t \rangle_{\Sigma_T^{p_i}} + \langle D_i u_i, (\eta^i)_t \rangle_{\Sigma_T^{p_i}} - \sum_{\substack{k \neq i \\ \Gamma_{ik} \neq \emptyset}} \langle K_i' p_{ik}^i - D_i u_{ik}^i, (\eta^i)_t \rangle_{\Sigma_T^{p_i}} = \\
& \hspace{20em} = \langle f_p^i, (\eta^i)_t \rangle_{\Sigma_T^{p_i}} \\
& \langle (V_i p_i)_t, \psi^{ij} \rangle_{\Sigma_T^{ij}} - \langle (K_i u_i)_t, \psi^{ij} \rangle_{\Sigma_T^{ij}} - \langle (V_j p_j)_t, \psi^{ij} \rangle_{\Sigma_T^{ij}} + \langle (K_j u_j)_t, \psi^{ij} \rangle_{\Sigma_T^{ij}} + \\
& \langle ((V_i + V_j) p_{ij})_t, \psi^{ij} \rangle_{\Sigma_T^{ij}} - \langle ((K_i + K_j) u_{ij})_t, \psi^{ij} \rangle_{\Sigma_T^{ij}} + \sum_{\substack{k \neq i \\ \Gamma_{ik} \neq \emptyset}} \langle (V_i p_{ik}^i - K_i u_{ik}^i)_t, \psi^{ij} \rangle_{\Sigma_T^{ij}} \\
& \quad - \sum_{\substack{k \neq j \\ \Gamma_{jk} \neq \emptyset}} \langle (V_j p_{jk}^j - K_j u_{jk}^j)_t, \psi^{ij} \rangle_{\Sigma_T^{ij}} = \langle (t_u^{ij})_t, \psi^{ij} \rangle_{\Sigma_T^{ij}} \\
& - \langle K_i' p_i, (\eta^{ij})_t \rangle_{\Sigma_T^{ij}} + \langle D_i u_i, (\eta^{ij})_t \rangle_{\Sigma_T^{ij}} - \langle K_j' p_j, (\eta^{ij})_t \rangle_{\Sigma_T^{ij}} + \langle D_j u_j, (\eta^{ij})_t \rangle_{\Sigma_T^{ij}} + \\
& - \langle (K_i' + K_j') p_{ij}, (\eta^{ij})_t \rangle_{\Sigma_T^{ij}} + \langle (D_i + D_j) u_{ij}, (\eta^{ij})_t \rangle_{\Sigma_T^{ij}} - \sum_{\substack{k \neq i \\ \Gamma_{ik} \neq \emptyset}} \langle K_i' p_{ik}^i - D_i u_{ik}^i, (\eta^{ij})_t \rangle_{\Sigma_T^{ij}} \\
& \quad - \sum_{\substack{k \neq j \\ \Gamma_{jk} \neq \emptyset}} \langle K_j' p_{jk}^j - D_j u_{jk}^j, (\eta^{ij})_t \rangle_{\Sigma_T^{ij}} = \langle (t_p^{ij}), (\eta^{ij})_t \rangle_{\Sigma_T^{ij}}
\end{aligned} \right. \tag{3.3.1}$$

Procediamo quindi con la discretizzazione. Fissiamo arbitrariamente un sottodominio  $\Omega_i$  ed una sua interfaccia  $\Gamma_{ij}$  che possiedano i requisiti sopra descritti.

Per quanto riguarda l'approssimazione temporale, consideriamo innanzitutto una decomposizione uniforme dell'intervallo  $[0, T]$ , di ampiezza  $\Delta t$  e formata da  $N_{\Delta t}$  sottointervalli, esattamente come al paragrafo 2.2.

Scegliamo anche in questo caso funzioni di forma lineari a tratti per approssimare in tempo gli spostamenti, costanti a tratti per approssimare in tempo le derivate normali degli spostamenti. Precisamente, per  $k = 0, \dots, N_{\Delta t} - 1$ , fissiamo

- $v_k^{u_i}(t) = v_k^{u_{ij}}(t) = R[t - t_k] - R[t - t_{k+1}]$  per  $u_i$  ed  $u_{ij}$ ,
- $v_k^{p_i}(t) = v_k^{p_{ij}}(t) = H[t - t_k] - H[t - t_{k+1}]$  per  $p_i$  e  $p_{ij}$ ,

dove  $R[\cdot]$  è la funzione a rampa definita in (2.2.3) e  $H[\cdot]$  è la funzione a gradino di Heaviside.

Per quanto riguarda la discretizzazione spaziale, utilizziamo il metodo di Galerkin. Innanzitutto approssimiamo il contorno del sottodominio  $\Omega_i$  mediante elementi rettilinei. Notiamo che, oltre al bordo di Dirichlet  $\Gamma_u^i$  e al bordo di Neumann  $\Gamma_p^i$ , ora è necessario decomporre anche la interfaccia  $\Gamma_{ij}$ .

Scegliamo quindi le funzioni di forma spaziali, in modo coerente col contesto funzionale in cui operiamo. Fissiamo

- $w_l^{u_i}(\mathbf{x}) \in X_{0,\ell}$ ,  $l = 1, \dots, N_{p_i}$  per l'approssimazione spaziale di  $u_i$ ,
- $w_l^{u_{ij}}(\mathbf{x}) \in X_{0,\ell}$ ,  $l = 1, \dots, N_{ij}$  per l'approssimazione spaziale di  $u_{ij}$ ,
- $w_l^{p_i}(\mathbf{x}) \in X_{-1,\ell}$ ,  $l = 1, \dots, N_{u_i}$  per l'approssimazione spaziale di  $p_i$ ,
- $w_l^{p_{ij}}(\mathbf{x}) \in X_{-1,\ell}$ ,  $l = 1, \dots, N_{ij}$  per l'approssimazione spaziale di  $p_{ij}$ .

Gli spazi funzionali  $X_{-1,\ell}$  e  $X_{0,\ell}$  sono quelli definiti rispettivamente in (2.2.4) e (2.2.5).

In definitiva, possiamo approssimare le funzioni incognite nel seguente modo

$$\begin{aligned}
u_i(\mathbf{x}, t) &\simeq \sum_{k=0}^{N_{\Delta t}-1} \sum_{l=1}^{N_{p_i}} \tilde{u}_{lk}^i w_l^{u_i}(\mathbf{x}) v_k^{u_i}(t), \\
p_i(\mathbf{x}, t) &\simeq \sum_{k=0}^{N_{\Delta t}-1} \sum_{l=1}^{N_{u_i}} \tilde{p}_{lk}^i w_l^{p_i}(\mathbf{x}) v_k^{p_i}(t), \\
u_{ij}(\mathbf{x}, t) &\simeq \sum_{k=0}^{N_{\Delta t}-1} \sum_{l=1}^{N_{ij}} \tilde{u}_{lk}^{ij} w_l^{u_{ij}}(\mathbf{x}) v_k^{u_{ij}}(t), \\
p_{ij}(\mathbf{x}, t) &\simeq \sum_{k=0}^{N_{\Delta t}-1} \sum_{l=1}^{N_{ij}} \tilde{p}_{lk}^{ij} w_l^{p_{ij}}(\mathbf{x}) v_k^{p_{ij}}(t).
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Vogliamo ora riscrivere in forma matriciale il problema debole discretizzato. Consideriamo il sistema (3.3.1) e sostituiamo alle funzioni incognite le loro

approssimazioni (3.3.2); come funzioni test scegliamo le funzioni di base. Più precisamente, per  $h = 0, \dots, N_{\Delta t} - 1$ , consideriamo

- $\psi^i(\mathbf{x}, t) = w_l^{p_i}(\mathbf{x})v_h^{p_i}(t)$ ,  $l = 1, \dots, N_{u_i}$ ,
- $\eta^i(\mathbf{x}, t) = w_l^{u_i}(\mathbf{x})v_h^{u_i}(t)$ ,  $l = 1, \dots, N_{p_i}$ ,
- $\psi^{ij}(\mathbf{x}, t) = w_l^{p_{ij}}(\mathbf{x})v_h^{p_{ij}}(t)$ ,  $l = 1, \dots, N_{ij}$ ,
- $\eta^{ij}(\mathbf{x}, t) = w_l^{u_{ij}}(\mathbf{x})v_h^{u_{ij}}(t)$ ,  $l = 1, \dots, N_{ij}$ .

La matrice  $\mathbb{E}_{\mathbf{M}}$ , risultante dalla discretizzazione, è quadrata di ordine

$$N_{\Delta t} \cdot \sum_{i=1}^n \left( N_{u_i} + N_{p_i} + 2 \sum_{\substack{j>i \\ \Gamma_{ij} \neq \emptyset}} N_{ij} \right),$$

e, come nel caso di un monodominio (2.3.7), ha una struttura tridiagonale inferiore di Toeplitz a blocchi. A sua volta, ciascun blocco  $\mathbb{E}_{\mathbf{M}}^{(\ell)}$ , per  $\ell = h - k$ ,  $k = 0, \dots, N_{\Delta t} - 1$ ,  $h = k, \dots, N_{\Delta t} - 1$ , è una matrice simmetrica di ordine  $\sum_{i=1}^n (N_{u_i} + N_{p_i} + 2 \sum_{j>i} N_{ij})$ . Per valutare gli elementi della matrice procediamo sfruttando le strategie descritte nel paragrafo 2.3: doppia integrazione analitica in tempo, doppia integrazione numerica in spazio.

Fissiamo arbitrariamente  $h$  e  $k$ , cioè consideriamo un generico blocco  $\mathbb{E}_{\mathbf{M}}^{(\ell)}$ ,  $\ell = 0, \dots, N_{\Delta t} - 1$ . Descriviamo formalmente, introducendo nuove notazioni, le diverse tipologie di sottoblocchi che costituiscono  $\mathbb{E}_{\mathbf{M}}^{(\ell)}$ . Nel seguito utilizzeremo la notazione  $\widetilde{H}_i = (-1)^{\alpha+\beta} H[c_i \Delta_{h+\alpha, k+\beta} - r]$ .

$$\bullet (\mathbf{V}_{i, u_i, u_i}^\ell)_{lm} = \sum_{\alpha, \beta=0}^1 \int_{\Gamma_{u_i}} \int_{\Gamma_{u_i}} \frac{1}{T_i} \widetilde{H}_i \bar{V}_i(r, t_{h+\alpha}, t_{k+\beta}) w_m^{p_i}(\xi) w_l^{p_i}(\mathbf{x}) d\gamma_\xi d\gamma_{\mathbf{x}},$$

dove  $l, m = 1, \dots, N_{u_i}$  e  $\bar{V}_i(r, t_h, t_k)$  è dato dalla (2.3.4), con  $c = c_i$ ;

$$\begin{aligned} \bullet (\mathbf{K}_{i, u_i, p_i}^\ell)_{lm} &= \sum_{\alpha, \beta=0}^1 \int_{\Gamma_{u_i}} \int_{\Gamma_{p_i}} \widetilde{H}_i \bar{K}_i(r, t_{h+\alpha}, t_{k+\beta}) w_m^{u_i}(\xi) w_l^{p_i}(\mathbf{x}) d\gamma_\xi d\gamma_{\mathbf{x}} = \\ &= (\mathbf{K}_{i, p_i, u_i}^\ell)_{ml}, \end{aligned}$$

dove  $l = 1, \dots, N_{u_i}$ ,  $m = 1, \dots, N_{p_i}$  e  $\bar{K}_i(r, t_h, t_k)$  è dato dalla (2.3.5), con  $c = c_i$ ;

$$\bullet (\mathbf{D}_{i, p_i, p_i}^\ell)_{lm} = \sum_{\alpha, \beta=0}^1 \int_{\Gamma_{p_i}} \int_{\Gamma_{p_i}} T_i \widetilde{H}_i \bar{D}_i(r, t_{h+\alpha}, t_{k+\beta}) w_m^{u_i}(\xi) w_l^{u_i}(\mathbf{x}) d\gamma_\xi d\gamma_{\mathbf{x}},$$

dove  $l, m = 1, \dots, N_{p_i}$  e  $\bar{D}_i(r, t_h, t_k)$  è dato dalla (2.3.6), con  $c = c_i$ ;  
 In maniera analoga, omettendo qualche ovvio particolare al fine di alleggerire la scrittura, introduciamo anche

$$\bullet (\mathbf{V}_{i,u_i,u_{ij}}^\ell)_{lm} = \sum_{\alpha,\beta} \int_{\Gamma_{u_i}} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{1}{T_i} \tilde{H}_i \bar{V}_i w_m^{p_{ij}}(\xi) w_l^{p_i}(\mathbf{x}) d\gamma_\xi d\gamma_{\mathbf{x}} = (\mathbf{V}_{i,u_{ij},u_i}^\ell)_{ml},$$

$$\bullet (\mathbf{K}_{i,u_i,p_{ij}}^\ell)_{lm} = \sum_{\alpha,\beta} \int_{\Gamma_{u_i}} \int_{\Gamma_{ij}} \tilde{H}_i \bar{K}_i w_m^{u_{ij}}(\xi) w_l^{p_i}(\mathbf{x}) d\gamma_\xi d\gamma_{\mathbf{x}} = (\mathbf{K}_{i,p_{ij},u_i}^\ell)_{ml},$$

dove  $l = 1, \dots, N_{u_i}$  e  $m = 1, \dots, N_{ij}$ ;

$$\bullet (\mathbf{K}_{i,u_{ij},p_i}^\ell)_{ml} = \sum_{\alpha,\beta} \int_{\Gamma_{p_i}} \int_{\Gamma_{ij}} \tilde{H}_i \bar{K}_i w_m^{p_{ij}}(\xi) w_l^{u_i}(\mathbf{x}) d\gamma_\xi d\gamma_{\mathbf{x}} = (\mathbf{K}_{i,p_i,u_{ij}}^\ell)_{lm},$$

$$\bullet (\mathbf{D}_{i,p_i,p_{ij}}^\ell)_{lm} = \sum_{\alpha,\beta} \int_{\Gamma_{p_i}} \int_{\Gamma_{ij}} T_i \tilde{H}_i \bar{D}_i w_m^{u_{ij}}(\xi) w_l^{u_i}(\mathbf{x}) d\gamma_\xi d\gamma_{\mathbf{x}} = (\mathbf{D}_{i,p_{ij},p_i}^\ell)_{ml},$$

dove  $l = 1, \dots, N_{p_i}$ ,  $m = 1, \dots, N_{ij}$ ;

$$\bullet (\mathbf{V}_{u_{ij},u_{ij}}^\ell)_{lm} = \sum_{\alpha,\beta} \int_{\Gamma_{ij}} \int_{\Gamma_{ij}} \left( \frac{1}{T_i} \tilde{H}_i \bar{V}_i + \frac{1}{T_j} \tilde{H}_j \bar{V}_j \right) w_m^{p_{ij}}(\xi) w_l^{p_{ij}}(\mathbf{x}) d\gamma_\xi d\gamma_{\mathbf{x}},$$

$$\bullet (\mathbf{K}_{u_{ij},p_{ij}}^\ell)_{lm} = \sum_{\alpha,\beta} \int_{\Gamma_{ij}} \int_{\Gamma_{ij}} \left( \tilde{H}_i \bar{K}_i + \tilde{H}_j \bar{K}_j \right) w_m^{u_{ij}}(\xi) w_l^{p_{ij}}(\mathbf{x}) d\gamma_\xi d\gamma_{\mathbf{x}} = (\mathbf{K}_{p_{ij},u_{ij}}^\ell)_{ml},$$

$$\bullet (\mathbf{D}_{p_{ij},p_{ij}}^\ell)_{lm} = \sum_{\alpha,\beta} \int_{\Gamma_{ij}} \int_{\Gamma_{ij}} \left( T_i \tilde{H}_i \bar{D}_i + T_j \tilde{H}_j \bar{D}_j \right) w_m^{u_{ij}}(\xi) w_l^{u_{ij}}(\mathbf{x}) d\gamma_\xi d\gamma_{\mathbf{x}},$$

dove  $l, m = 1, \dots, N_{ij}$ .

Siano ora  $i < j$  e  $i' < j'$ , con  $i, j, i', j' \in \{1, \dots, n\}$ . Supponiamo che  $(i, j) \neq (i', j')$  e che  $\{i, j\} \cap \{i', j'\} \neq \emptyset$ . Sotto queste ipotesi  $\{i, j\} \cap \{i', j'\}$  ha un unico elemento, che denotiamo con  $\hat{i}$ .

$$\bullet (\mathbf{V}_{\hat{i},u_{ij},u_{i'j'}}^\ell)_{lm} = \sum_{\alpha,\beta} \int_{\Gamma_{ij}} \int_{\Gamma_{i'j'}} \frac{1}{T_{\hat{i}}} \tilde{H}_{\hat{i}} \bar{V}_{\hat{i}} w_m^{p_{i'j'}}(\xi) w_l^{p_{ij}}(\mathbf{x}) d\gamma_\xi d\gamma_{\mathbf{x}} = (\mathbf{V}_{\hat{i},u_{i'j'},u_{ij}}^\ell)_{ml},$$

$$\bullet (\mathbf{K}_{\hat{i},u_{ij},p_{i'j'}}^\ell)_{lm} = \sum_{\alpha,\beta} \int_{\Gamma_{ij}} \int_{\Gamma_{i'j'}} \tilde{H}_{\hat{i}} \bar{K}_{\hat{i}} w_m^{u_{i'j'}}(\xi) w_l^{p_{ij}}(\mathbf{x}) d\gamma_\xi d\gamma_{\mathbf{x}} = (\mathbf{K}_{\hat{i},p_{i'j'},u_{ij}}^\ell)_{ml},$$

$$\bullet (\mathbf{K}_{\hat{i},p_{ij},u_{i'j'}}^\ell)_{lm} = \sum_{\alpha,\beta} \int_{\Gamma_{ij}} \int_{\Gamma_{i'j'}} \tilde{H}_{\hat{i}} \bar{K}_{\hat{i}} w_m^{p_{i'j'}}(\xi) w_l^{u_{ij}}(\mathbf{x}) d\gamma_\xi d\gamma_{\mathbf{x}} = (\mathbf{K}_{\hat{i},u_{i'j'},p_{ij}}^\ell)_{ml},$$

$$\bullet (\mathbf{D}_{\hat{i},p_{ij},p_{i'j'}}^\ell)_{lm} = \sum_{\alpha,\beta} \int_{\Gamma_{ij}} \int_{\Gamma_{i'j'}} T_{\hat{i}} \tilde{H}_{\hat{i}} \bar{D}_{\hat{i}} w_m^{u_{i'j'}}(\xi) w_l^{u_{ij}}(\mathbf{x}) d\gamma_\xi d\gamma_{\mathbf{x}} = (\mathbf{D}_{\hat{i},p_{i'j'},p_{ij}}^\ell)_{ml},$$

dove  $l = 1, \dots, N_{ij}$ ,  $l = 1, \dots, N_{i'j'}$ .

Riassumendo, a livello di notazione: la lettera  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{D}$  indica il tipo di nucleo; l'apice rimanda allo step temporale considerato ed indica il blocco matriciale cui l'elemento appartiene; in generale i tre pedici indicano rispettivamente l'indice delle costanti caratteristiche del sottodominio  $\Omega_i$ , il dominio di integrazione dell'integrale più esterno, il dominio di integrazione dell'integrale più interno. In alcuni casi, quelli in cui i nuclei sono ottenuti come combinazione lineare di altri nuclei, vi sono solo due pedici che indicano rispettivamente i domini di integrazione dell'integrale più esterno e dell'integrale più interno.

Per meglio chiarire la struttura di ciascun blocco, riportiamo per esteso  $\mathbb{E}_M^{(\ell)}$  nel caso di un bidominio e di un tridominio.

Per quanto riguarda il bidominio supponiamo, in generale, che  $\Gamma_u^i \neq \emptyset$  e  $\Gamma_p^i \neq \emptyset$  per  $i = 1, 2$ .

$\mathbf{V}_{1,u_1,u_1}^\ell$	$-\mathbf{K}_{1,u_1,q_1}^\ell$	0	0	$\mathbf{V}_{1,u_1,u_{12}}^\ell$	$-\mathbf{K}_{1,u_1,u_{12}}^\ell$
$-\mathbf{K}_{1,q_1,u_1}^\ell$	$\mathbf{D}_{1,q_1,q_1}^\ell$	0	0	$-\mathbf{K}_{1,q_1,u_{12}}^\ell$	$\mathbf{D}_{1,q_1,q_{12}}^\ell$
0	0	$\mathbf{V}_{2,u_2,u_2}^\ell$	$-\mathbf{K}_{2,u_2,p_2}^\ell$	$-\mathbf{V}_{2,u_2,u_{12}}^\ell$	$-\mathbf{K}_{2,u_2,p_{12}}^\ell$
0	0	$-\mathbf{K}_{2,p_2,u_2}^\ell$	$\mathbf{D}_{2,p_2,p_2}^\ell$	$\mathbf{K}_{2,p_2,u_{12}}^\ell$	$\mathbf{D}_{2,p_2,p_{12}}^\ell$
$\mathbf{V}_{1,u_{12},u_1}^\ell$	$-\mathbf{K}_{1,u_{12},p_1}^\ell$	$-\mathbf{V}_{2,u_{12},u_2}^\ell$	$\mathbf{K}_{2,u_{12},p_2}^\ell$	$\mathbf{V}_{u_{12},u_{12}}^\ell$	$-\mathbf{K}_{u_{12},p_{12}}^\ell$
$-\mathbf{K}_{1,p_{12},u_1}^\ell$	$\mathbf{D}_{1,p_{12},p_1}^\ell$	$-\mathbf{K}_{2,p_{12},u_2}^\ell$	$\mathbf{D}_{2,p_{12},p_2}^\ell$	$-\mathbf{K}_{p_{12},u_{12}}^\ell$	$\mathbf{D}_{p_{12},p_{12}}^\ell$

Il vettore delle incognite risulta così ordinato

$$\left( \tilde{\mathbf{p}}_1^\ell \quad \tilde{\mathbf{u}}_1^\ell \quad \tilde{\mathbf{p}}_2^\ell \quad \tilde{\mathbf{u}}_2^\ell \quad \tilde{\mathbf{p}}_{12}^\ell \quad \tilde{\mathbf{u}}_{12}^\ell \right)^T,$$

dove  $\tilde{\mathbf{p}}_i^\ell = (\tilde{p}_i^\ell)_j$ ,  $j = 1, \dots, N_{u_i}$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_i^\ell = (\tilde{u}_i^\ell)_j$ ,  $j = 1, \dots, N_{p_i}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\tilde{\mathbf{p}}_{12}^\ell = (\tilde{p}_{12}^\ell)_j$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_{12}^\ell = (\tilde{u}_{12}^\ell)_j$ ,  $j = 1, \dots, N_{12}$ .

Anche per il tridominio consideriamo il caso più generale possibile:  $\Gamma_u^i \neq \emptyset$ ,  $\Gamma_p^i \neq \emptyset$  per  $i = 1, 2, 3$  e  $\Gamma_{12} \neq \emptyset$ ,  $\Gamma_{13} \neq \emptyset$ ,  $\Gamma_{23} \neq \emptyset$ .

Il vettore delle incognite ha la seguente forma

$$\left( \tilde{\mathbf{p}}_1^\ell \quad \tilde{\mathbf{u}}_1^\ell \quad \tilde{\mathbf{p}}_2^\ell \quad \tilde{\mathbf{u}}_2^\ell \quad \tilde{\mathbf{p}}_3^\ell \quad \tilde{\mathbf{u}}_3^\ell \quad \tilde{\mathbf{p}}_{12}^\ell \quad \tilde{\mathbf{u}}_{12}^\ell \quad \tilde{\mathbf{p}}_{13}^\ell \quad \tilde{\mathbf{u}}_{13}^\ell \quad \tilde{\mathbf{p}}_{23}^\ell \quad \tilde{\mathbf{u}}_{23}^\ell \right)^T.$$

$V_{1,u_1,u_1}^\ell$	$-K_{1,u_1,p_1}^\ell$	0	0	0	0	$V_{1,u_1,u_1}^\ell$	$-K_{1,u_1,p_1}^\ell$	0	0	$V_{1,u_1,u_1}^\ell$	$-K_{1,u_1,p_1}^\ell$	0	0
$-K_{1,p_1,u_1}^\ell$	$D_{1,p_1,p_1}^\ell$	0	0	0	0	$-K_{1,p_1,u_1}^\ell$	$D_{1,p_1,p_1}^\ell$	0	0	$-K_{1,p_1,u_1}^\ell$	$D_{1,p_1,p_1}^\ell$	0	0
0	0	$V_{2,u_2,u_2}^\ell$	$-K_{2,u_2,p_2}^\ell$	0	0	$-V_{2,u_2,u_2}^\ell$	$-K_{2,u_2,p_2}^\ell$	0	0	0	0	$V_{2,u_2,u_2}^\ell$	$-K_{2,u_2,p_2}^\ell$
0	0	$-K_{2,p_2,u_2}^\ell$	$D_{2,p_2,p_2}^\ell$	0	0	$K_{2,p_2,u_2}^\ell$	$D_{2,p_2,p_2}^\ell$	0	0	0	0	$-K_{2,p_2,u_2}^\ell$	$D_{2,p_2,p_2}^\ell$
0	0	0	0	$V_{3,u_3,u_3}^\ell$	$-K_{3,u_3,p_3}^\ell$	0	0	0	0	$-V_{3,u_3,u_3}^\ell$	$-K_{3,u_3,p_3}^\ell$	$-V_{3,u_3,u_3}^\ell$	$-K_{3,u_3,p_3}^\ell$
0	0	0	0	$-K_{3,p_3,u_3}^\ell$	$D_{3,p_3,p_3}^\ell$	0	0	0	0	$K_{3,p_3,u_3}^\ell$	$D_{3,p_3,p_3}^\ell$	$K_{3,p_3,u_3}^\ell$	$D_{3,p_3,p_3}^\ell$
$V_{1,u_{12},u_1}^\ell$	$-K_{1,u_{12},p_1}^\ell$	$-V_{2,u_{12},u_2}^\ell$	$K_{2,u_{12},p_2}^\ell$	0	0	$V_{u_{12},u_{12}}^\ell$	$-K_{1,u_{12},p_1}^\ell$	0	0	$V_{1,u_{12},u_1}^\ell$	$-K_{1,u_{12},p_1}^\ell$	$-V_{2,u_{12},u_2}^\ell$	$K_{2,u_{12},p_2}^\ell$
$-K_{1,p_{12},u_1}^\ell$	$D_{1,p_{12},p_1}^\ell$	$-K_{2,p_{12},u_2}^\ell$	$D_{2,p_{12},p_2}^\ell$	0	0	$-K_{p_{12},u_{12}}^\ell$	$D_{1,p_{12},p_1}^\ell$	0	0	$-K_{1,p_{12},u_1}^\ell$	$D_{1,p_{12},p_1}^\ell$	$-K_{2,p_{12},u_2}^\ell$	$D_{2,p_{12},p_2}^\ell$
$V_{1,u_{13},u_1}^\ell$	$-K_{1,u_{13},p_1}^\ell$	0	0	$-V_{3,u_{13},u_3}^\ell$	$-K_{3,u_{13},p_3}^\ell$	$V_{u_{13},u_{13}}^\ell$	$-K_{1,u_{13},p_1}^\ell$	0	0	$V_{u_{13},u_{13}}^\ell$	$-K_{1,u_{13},p_1}^\ell$	$-V_{3,u_{13},u_3}^\ell$	$-K_{3,u_{13},p_3}^\ell$
$-K_{1,p_{13},u_1}^\ell$	$D_{1,p_{13},p_1}^\ell$	0	0	$-K_{3,p_{13},u_3}^\ell$	$D_{3,p_{13},p_3}^\ell$	$-K_{p_{13},u_{13}}^\ell$	$D_{1,p_{13},p_1}^\ell$	0	0	$-K_{p_{13},u_{13}}^\ell$	$D_{1,p_{13},p_1}^\ell$	$-K_{3,p_{13},u_3}^\ell$	$-K_{3,p_{13},p_3}^\ell$
0	0	$V_{2,u_{23},u_2}^\ell$	$-K_{2,u_{23},p_2}^\ell$	$-V_{3,u_{23},u_3}^\ell$	$-K_{3,u_{23},p_3}^\ell$	$-V_{2,u_{23},u_2}^\ell$	$-K_{2,u_{23},p_2}^\ell$	0	0	$V_{3,u_{23},u_3}^\ell$	$-K_{2,u_{23},p_2}^\ell$	$-V_{3,u_{23},u_3}^\ell$	$-K_{3,u_{23},p_3}^\ell$
0	0	$-K_{2,p_{23},u_2}^\ell$	$D_{2,p_{23},p_2}^\ell$	$-K_{3,p_{23},u_3}^\ell$	$D_{3,p_{23},p_3}^\ell$	$K_{2,p_{23},u_2}^\ell$	$D_{2,p_{23},p_2}^\ell$	0	0	$K_{3,p_{23},u_3}^\ell$	$D_{3,p_{23},p_3}^\ell$	$-K_{2,p_{23},u_2}^\ell$	$-K_{3,p_{23},p_3}^\ell$



## Capitolo 4

# Esempi Numerici

In questo capitolo risolveremo numericamente problemi con condizioni al bordo di tipo misto e Neumann precedentemente presi in esame, riportando e commentando le soluzioni approssimate ottenute.

Come già evidenziato, il metodo di Galerkin agli elementi di contorno di tipo energetico da noi adottato è stato inizialmente applicato a problemi definiti su domini globalmente omogenei; nel terzo capitolo abbiamo presentato una estensione di tale metodo per il trattamento di problemi definiti su multidomini. Pertanto, il punto di partenza naturale per validare i nostri risultati è il riferimento a quanto avviene sui monodomini e, ove possibile, confronteremo i nostri risultati con quelli presenti in letteratura.

### 4.1 Problema misto interno

#### 4.1.1 Il caso di un monodominio

Il problema test è preso da [23]. Consideriamo una striscia omogenea di lunghezza infinita e di altezza costante  $L = 1$ , il cui bordo inferiore è fissato mentre il bordo superiore è soggetto ad una trazione uniforme. In questo esempio utilizzeremo la terminologia tipica dell'eleastodinamica perchè questo particolare problema è la versione scalare di un classico problema di elastodinamica lineare. Inoltre il modello è chiaramente riconducibile ad un problema monodimensionale in direzione perpendicolare a quella lungo la quale la striscia è illimitata.

Consideriamo una porzione finita  $\Omega$  di tale striscia, di forma rettangolare, fissata in modo tale che altezza e base siano in rapporto cinque ad uno.

Il problema è modellato assegnando sul bordo inferiore il dato di Dirichlet  $\bar{u} \equiv 0$ , sul bordo superiore  $\bar{p}(t) = H[t]$  e sui bordi laterali la condizione di equilibrio  $\bar{p} \equiv 0$ . Per quanto riguarda le costanti, fissiamo la velocità  $c = 1$  e la tensione  $T = 1$  (figura 4.1.1).

Il bordo  $\Gamma$  è discretizzato mediante una mesh uniforme di ampiezza  $\Delta x = 0.1$ . La base del rettangolo è costituita da due elementi e l'altezza è costituita da 10 elementi, nel rispetto della proporzione prima fissata. Per l'approssimazione spaziale dello spostamento  $u(\mathbf{x}, t)$  abbiamo scelto fun-

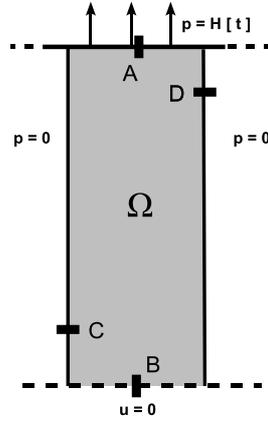


Figura 4.1.1: Dominio e condizioni al contorno per il problema misto interno nel caso di un monodominio.

zioni di forma lineari a tratti, mentre per l'approssimazione spaziale della trazione  $p(\mathbf{x}, t)$  abbiamo scelto funzioni di forma costanti a tratti. Per quanto riguarda il dominio temporale, consideriamo l'intervallo  $[0, 10]$  e scegliamo una decomposizione di ampiezza  $\Delta t = 0.1$ . Per la discretizzazione temporale procediamo come descritto nei paragrafi 2.2, 2.3.

Questo modello, insieme al suo corrispettivo monodimensionale, è spesso presente in letteratura. Si tratta di un problema particolarmente significativo per testare la validità dei risultati numerici ottenuti perchè si osserva che, avendo fissato una ascissa  $\bar{x}$ , il segmento  $(\bar{x}, y)$ , con  $y$  che varia lungo l'altezza del rettangolo, è di fatto una corda elastica. Risulta pertanto naturale confrontare i risultati numerici ottenuti nel caso bidimensionale per  $u(\bar{x}, y, t)$  e per  $p(\bar{x}, y, t)$  con le soluzioni esatte ed approssimate ottenute per l'analogo monodimensionale [4]. In particolare, è possibile dedurre la soluzione esatta, nel caso monodimensionale, dalla seguente uguaglianza:

$$u(y, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k [H(t - y - 2kL)(t - y - 2kL)^2 + H(t + y - 2(k + 1)L)^2] - \frac{t^2}{2}.$$

In figura 4.1.2 riportiamo a destra l'evoluzione temporale della trazione nel punto  $A$  e a sinistra il grafico degli spostamenti nei punti  $B, C, D$  indicati in figura 4.1.1. Osserviamo che vi sono oscillazioni nel grafico di  $p(A, t)$ , dovute alla difficoltà di approssimare numericamente i salti della soluzione analitica, ma la soluzione numerica ottenuta con l'approccio energetico rimane sostanzialmente stabile.

#### 4.1.2 Il caso di un bidominio

Generalizziamo ora il problema precedente al caso in cui la striscia in questione non sia più omogenea, ma sia invece costituita da due diversi strati sovrapposti  $\Omega_1$  ed  $\Omega_2$ , come in [37]. Un esempio di tale dominio è mostrato in figura 4.1.3.

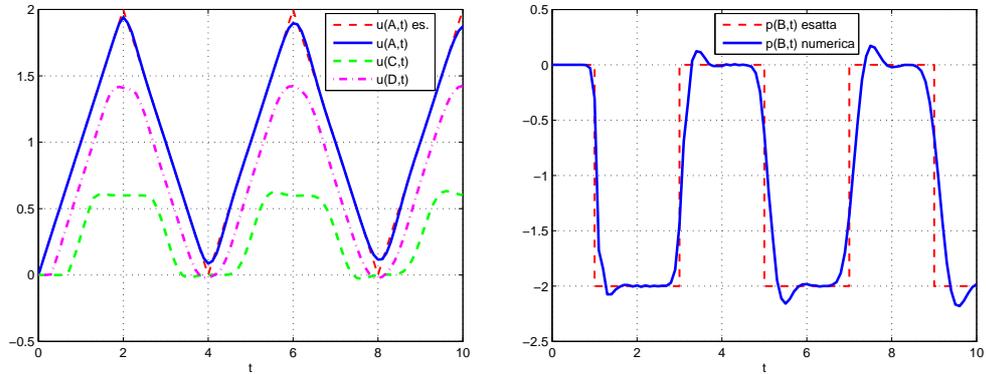


Figura 4.1.2: Soluzioni approssimate del problema misto interno nel caso di un monodominio.

Di conseguenza i valori delle costanti caratteristiche del mezzo sono differenti.

Le condizioni al contorno e le dimensioni del dominio  $\Omega$  sono sempre quelle descritte nel sottoparagrafo precedente. Osserviamo che rispetto al sottodominio  $\Omega_1$  dovremo risolvere un problema con condizioni al contorno di Neumann, in quanto il bordo  $\partial\Omega \cap \partial\Omega_1$  è solo di tipo Neumann. Per il sottodominio  $\Omega_2$  dobbiamo invece risolvere ancora un problema con condizioni al contorno miste.

Analizzeremo il comportamento della trazione e dello spostamento in diversi punti del dominio (tipicamente le due basi del rettangolo e l'interfaccia fra i due domini) al variare della quota dell'interfaccia e al variare della velocità di propagazione dell'onda elastica.

Esaminiamo innanzitutto il caso geometricamente simmetrico in cui

■ **L'interfaccia divide a metà la striscia  $\Omega$**  (figura 4.1.3).

Supponiamo inizialmente che, per le tensioni,  $T_1 = T_2 = 1$  e che, per le velocità,  $c_1 = c_2 = 1$ . Fissiamo  $\Delta x = 0.1$  per la discretizzazione spaziale,  $\Delta t = 0.1$  per la discretizzazione temporale dell'intervallo  $[0, 10]$ . In figura 4.1.4 è mostrata la soluzione numerica ottenuta con l'approccio energetico nei punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Si può osservare come la soluzione nei punti  $A$  e  $B$  rispecchi quella ottenuta con la simulazione nel caso del monodominio, mentre nel punto  $C$  trazione e spostamento si comportino in maniera analoga al caso monodimensionale.

La matrice del sistema lineare proveniente dalla discretizzazione di questo problema mediante il metodo di Galerkin energetico è stata modificata mediante opportune *orlature* del blocco  $\mathbb{E}^{(0)}$  definito in (2.3.7). Di fatto vengono aggiunte righe e colonne in modo tale che il blocco matriciale conservi la sua simmetria e in modo da imporre le condizioni di continuità (3.1.2) per

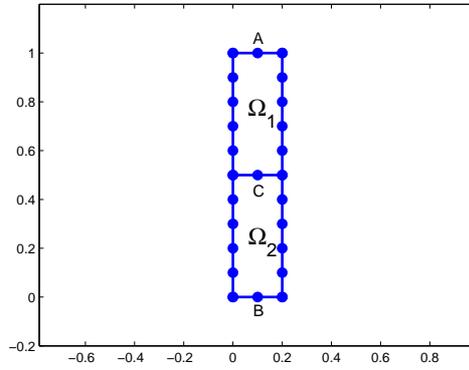


Figura 4.1.3: Bidominio con interfaccia situata a metà dell'altezza

lo spostamento  $u(\mathbf{x}, t)$  nei nodi di raccordo tra l'interfaccia e le rimanenti porzioni di contorno dei due sottodomini.

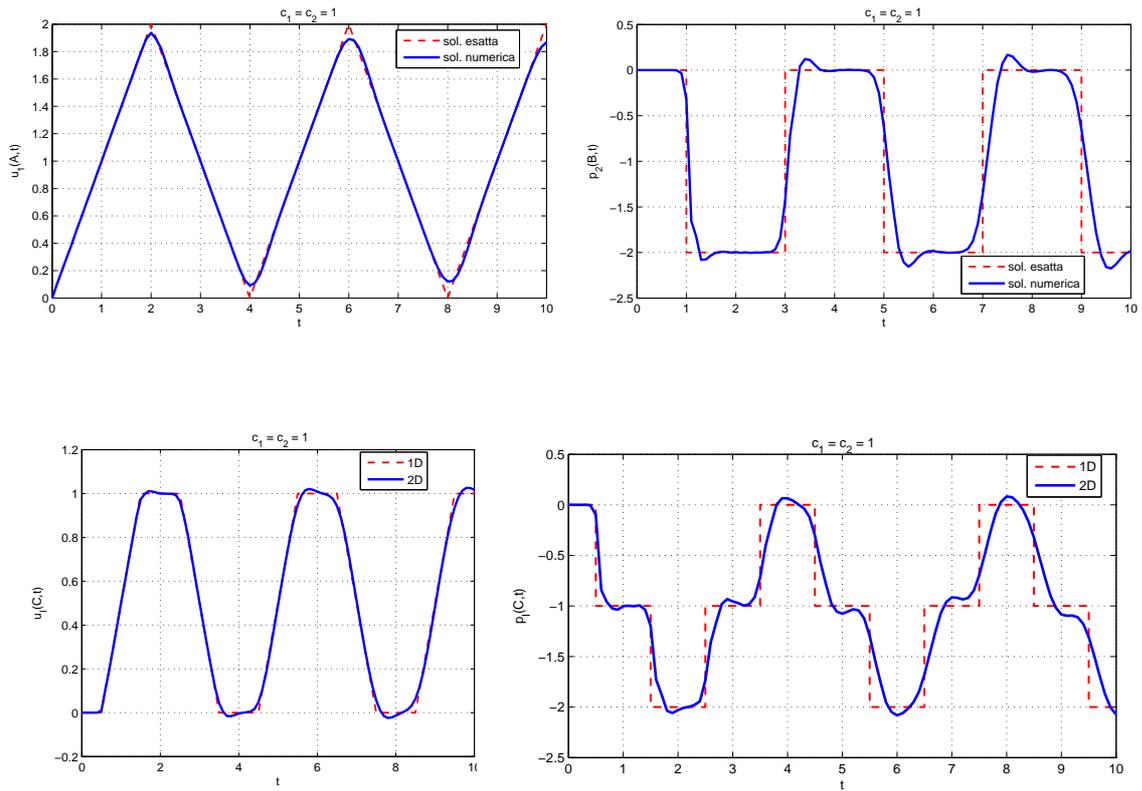


Figura 4.1.4: Soluzioni approssimate riferite al bidominio in figura 4.1.3.

Procediamo lasciando invariati l'intervallo temporale  $[0, 10]$  considerato e i parametri di discretizzazione spaziale e temporale ( $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.1$ ). Supponiamo ancora, per entrambi i domini,  $T_1 = T_2 = 1$ . Variamo però le velocità, ponendo  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ . I risultati così ottenuti sono riportati in figura 4.1.5, esibendo un confronto con i corrispondenti risultati del modello monodimensionale.

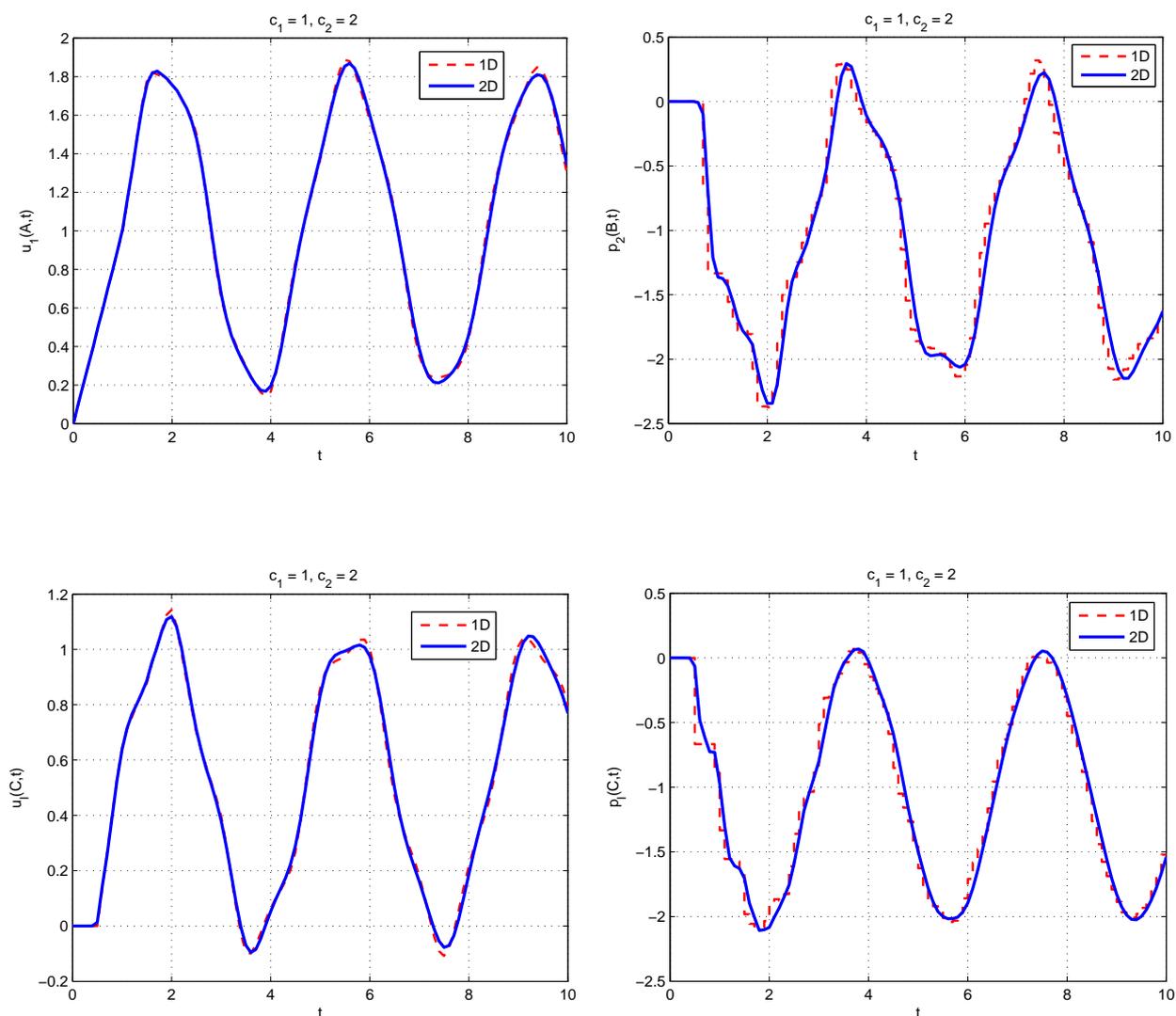


Figura 4.1.5: Soluzioni approssimate riferite al bidominio in figura 4.1.3.

Trattiamo, in modo analogo, il caso duale rispetto al precedente, cioè quello in cui  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = 1$  (figura 4.1.6).

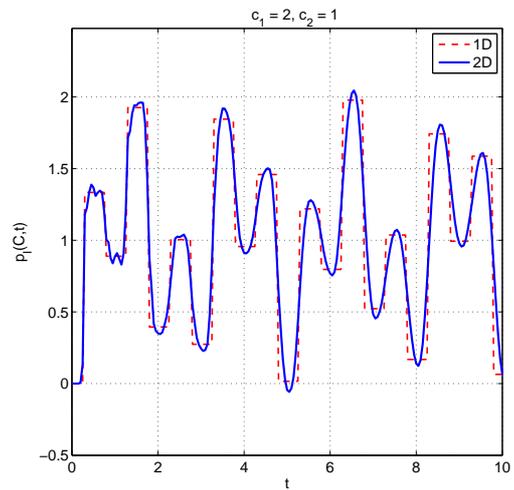
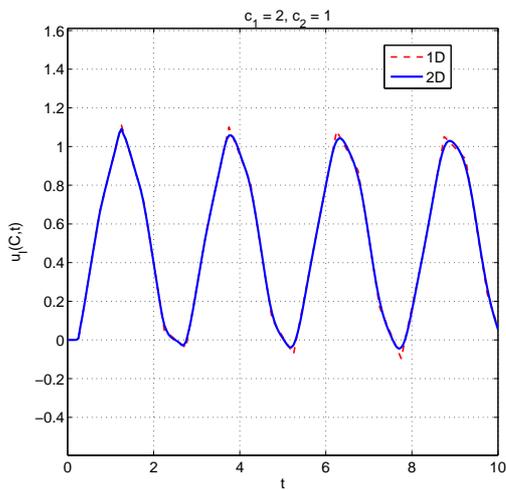
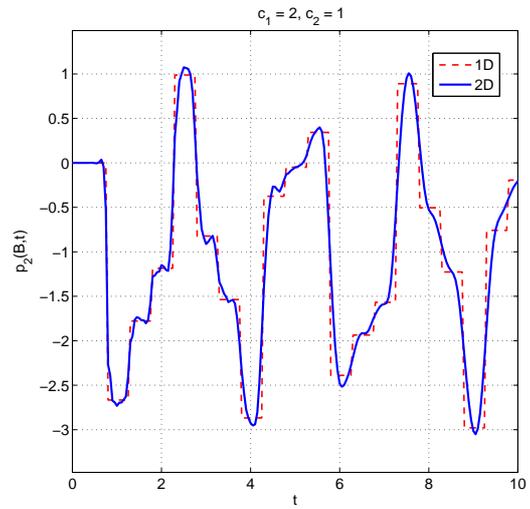
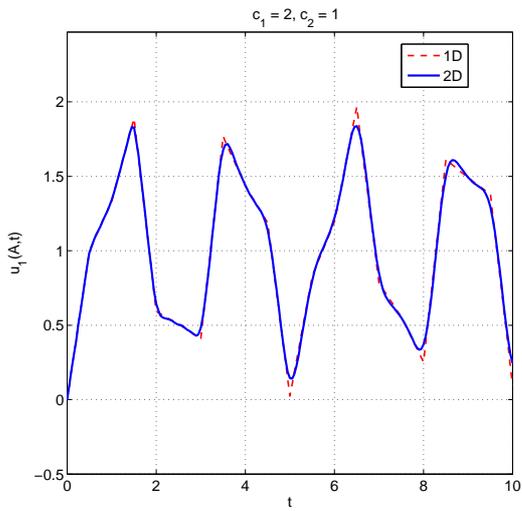


Figura 4.1.6: Soluzioni approssimate riferite al bidominio in figura 4.1.3.

■ **Interfaccia situata vicino alla base inferiore della striscia** (figura 4.1.7)

Analogamente al caso precedente, scegliamo i seguenti parametri:

- $\Delta x = 0.1$  per la discretizzazione di tutti i bordi spaziali;
- $\Delta t = 0.1$  per la discretizzazione temporale dell'intervallo  $[0, 10]$ ;
- $T_1 = T_2 = 1$ ;
- $c_1 = 1, c_2 = 2$  (figura 4.1.8);

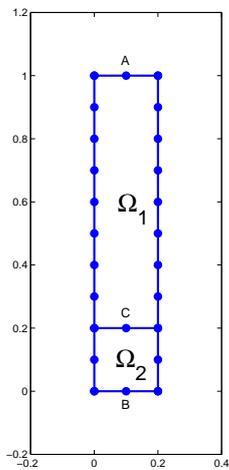


Figura 4.1.7: Bidominio con interfaccia situata a un quinto dell'altezza

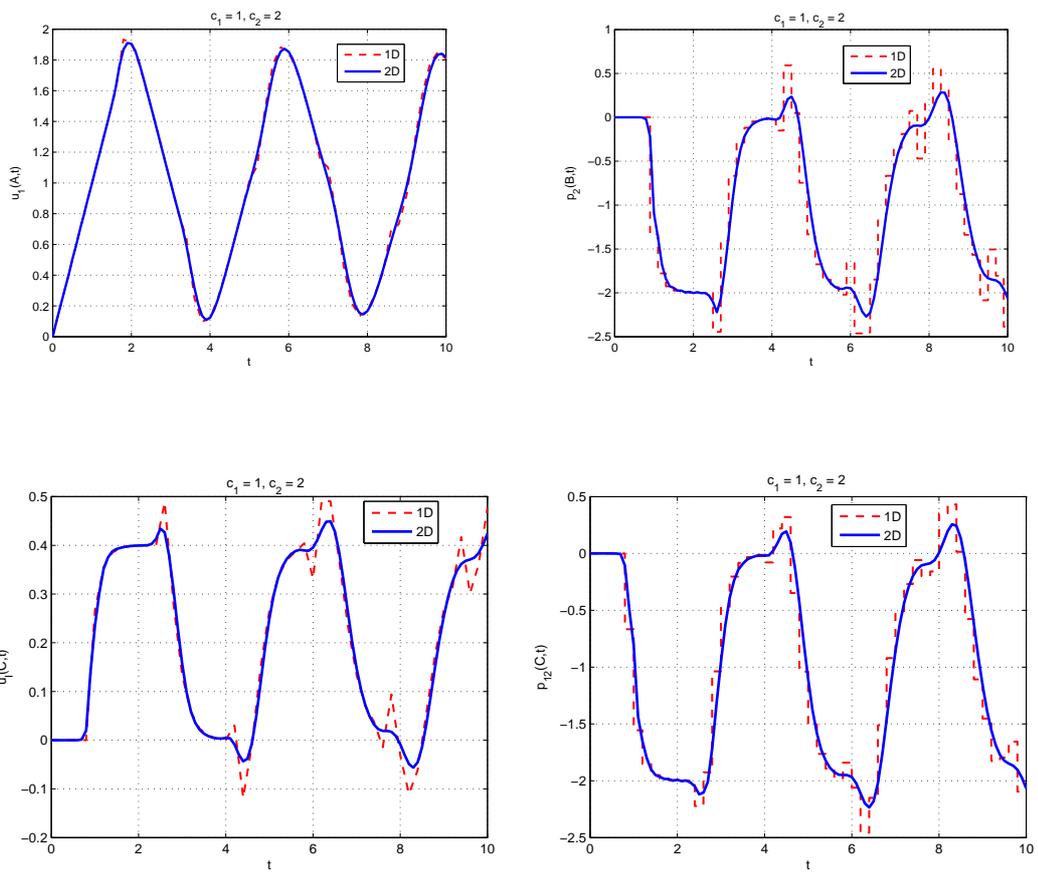


Figura 4.1.8: Soluzioni approssimate riferite al bidominio in figura 4.1.7.

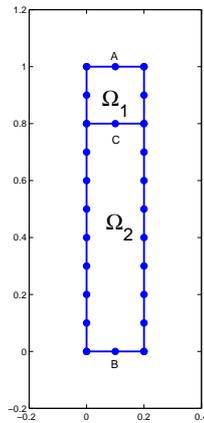


Figura 4.1.9: Bidominio con interfaccia situata a quattro quinti dell'altezza

■ **Interfaccia situata vicino alla base superiore della striscia** (figura 4.1.9)

Ripetiamo lo stesso problema test, alzando però la posizione dell'interfaccia.

I parametri di discretizzazione sono:

- $\Delta x = 0.1$  per la discretizzazione di tutti i bordi spaziali;
- $\Delta t = 0.1$  per la discretizzazione temporale dell'intervallo  $[0, 10]$ ;
- $T_1 = T_2 = 1$ ;
- $c_1 = 2, c_2 = 1$  (figura 4.1.10);

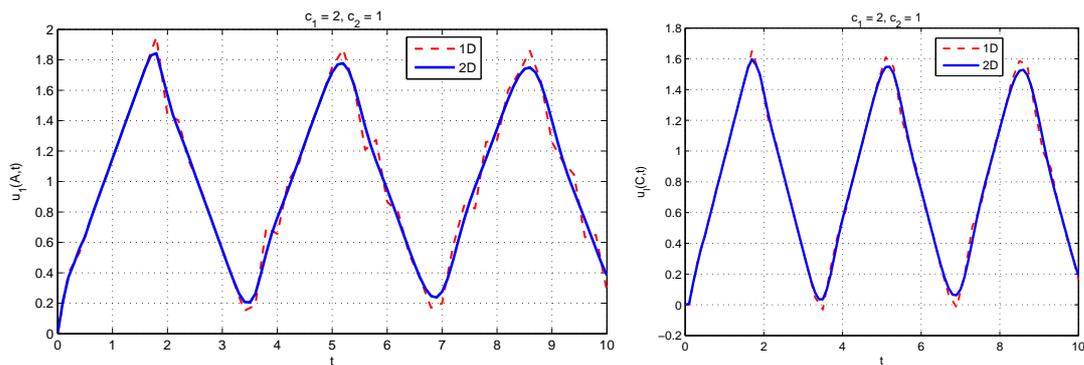


Figura 4.1.10: Grafico della spostamento  $u(\mathbf{x}, t)$  nei punti  $A$  e  $C$  riportati in figura 4.1.9

Si osservi che, come già notato nel caso di un monodominio, le trazioni  $p(\mathbf{x}, t)$  sono in generale meno accurate rispetto a  $u(\mathbf{x}, t)$ , in quanto presentano discontinuità di tipo salto difficili da approssimare numericamente.

Fisicamente, nel caso di bidomini, l'evoluzione temporale dello spostamento e della trazione è determinata anche dai fenomeni diffrazione e riflessione dovuti alla presenza dell'interfaccia. Confrontando le soluzioni sopra riportate notiamo che, nel caso in cui l'interfaccia cade a metà, i grafici dello spostamento e della trazione presentano un comportamento molto più simmetrico e regolare rispetto ai casi in cui l'interfaccia è spostata verso le parti terminali della striscia. In ogni caso, si vuole mettere in risalto che, sebbene si siano utilizzati parametri di discretizzazione non eccessivamente fini, le soluzioni numeriche ottenute si mantengono stabili su tutto l'arco temporale delle simulazioni.

■ **Bidominio ad inclusione** (figura 4.1.11)

Consideriamo ancora un problema modello analogo a quello proposto in

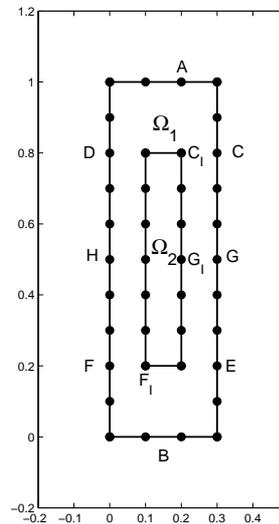


Figura 4.1.11: Problema misto interno per un bidominio ad inclusione

[23], ovvero trattiamo un problema misto interno con gli stessi dati al bordo prima descritti. Supponiamo che il dominio spaziale del problema non sia globalmente omogeneo, ma sia costituito da due rettangoli, uno incluso nell'altro, in modo che i centri dei due sottodomini coincidano (figura 4.1.11). Notiamo che, a differenza di prima, rispetto al primo sottodominio dobbiamo risolvere un problema con condizioni al bordo di tipo misto, mentre il bordo del secondo sottodominio è costituito interamente dall'interfaccia. Per quanto riguarda i parametri di discretizzazione:

- consideriamo  $\Delta x = 0.1$  per tutti i bordi spaziali;

- esaminiamo l'intervallo di tempo  $[0, 7.98]$  suddiviso in 114 istanti temporali di ampiezza  $\Delta t = 0.07$ .

Questa scelta è coerente con quella proposta in [22] per il monodominio, in quanto è stato sperimentalmente osservato che il rapporto  $\Delta t/\Delta x = 0.7$  è quello che rende maggiormente stabili i risultati e permette di approssimare meglio le discontinuità di tipo salto delle derivate normali dello spostamento;

- $T_1 = T_2 = 1$ ;
- $c_1 = 1, c_2 = 2$  oppure  $c_1 = 2, c_2 = 1$ .

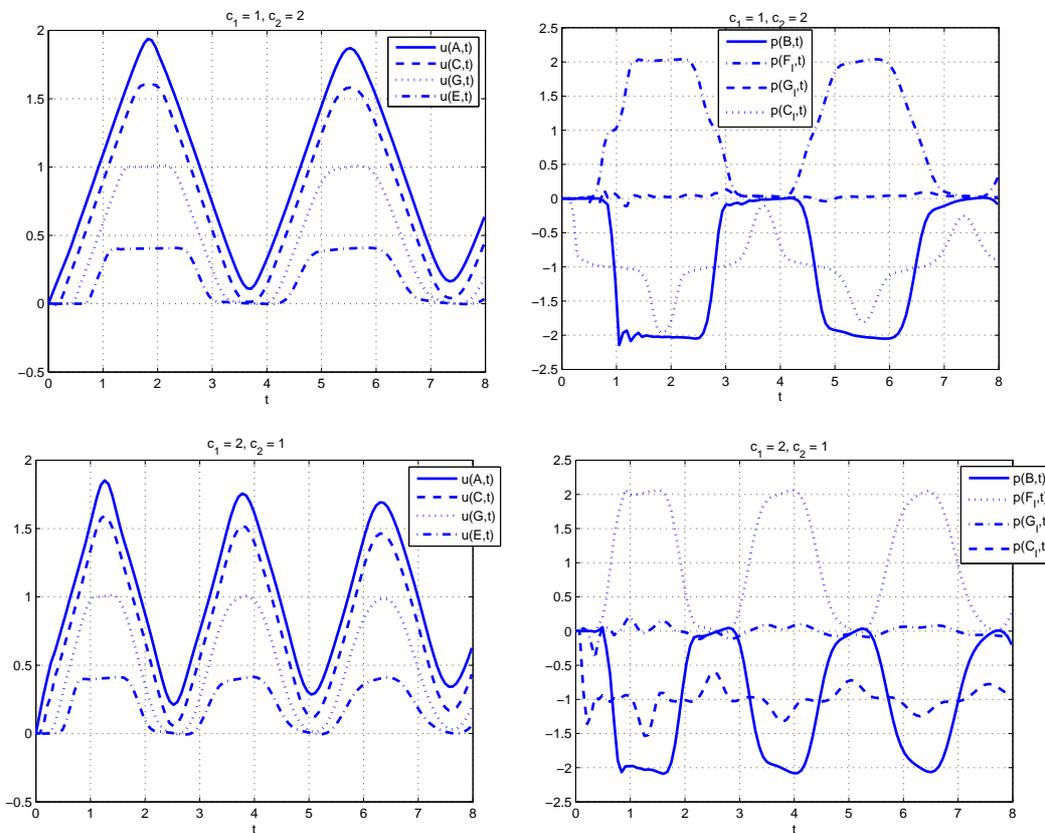


Figura 4.1.12: Nelle figure di sinistra sono mostrati gli spostamenti  $u(\mathbf{x}, t)$ , nelle figure di destra le trazioni  $p(\mathbf{x}, t)$ , in riferimento ai punti evidenziati in figura 4.1.11. Le due figure in alto si riferiscono alle soluzioni calcolate per  $c_1 = 1$  e  $c_2 = 2$ , mentre le due figure in basso si riferiscono alle soluzioni calcolate per  $c_1 = 2$  e  $c_2 = 1$ .

A differenza degli esempi proposti fino ad ora, non esiste un analogo monodimensionale con cui poter confrontare i risultati ottenuti per il problema ora

in esame, in quanto i sottodomini sono l'uno incluso propriamente nell'altro. Osserviamo tuttavia che il comportamento di  $u(\mathbf{x}, t)$  e di  $p(\mathbf{x}, t)$  nei punti  $A$  e  $B$  (figura 4.1.11) è del tutto assimilabile a quello ottenuto, ad esempio, nel caso di un monodominio.

Possiamo anche testare la validità dei risultati ottenuti sfruttando la particolare geometria del dominio in esame. Infatti abbiamo verificato che il comportamento di  $u(\mathbf{x}, t)$  nei punti della mesh con uguale ordinata è identico: in particolare, sempre in riferimento alla figura 4.1.11, il grafico di  $u(C_I, t)$  e  $u(D, t)$  si sovrappone perfettamente a quello di  $u(C, t)$  sopra riportato e lo stesso succede per il grafico di  $u(G_I, t)$  e  $u(H, t)$  con  $u(G, t)$ ,  $u(F, t)$  e  $u(F_I, t)$  con  $u(E, t)$ . Ciò vale anche per i grafici di  $p(\mathbf{x}, t)$  relativi a punti situati sull'interfaccia alla stessa quota.

### 4.1.3 Il caso di un tridominio

Generalizziamo ulteriormente l'analisi effettuata nei sottoparagrafi precedenti al caso in cui la striscia in questione sia costituita da tre strati sovrapposti  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ , di uguale altezza e localmente omogenei.

Per rendere più agevole la decomposizione del contorno spaziale supponiamo che altezza e larghezza della porzione di striscia considerata siano in rapporto nove a due (figura 4.1.13). Fissiamo i seguenti parametri:

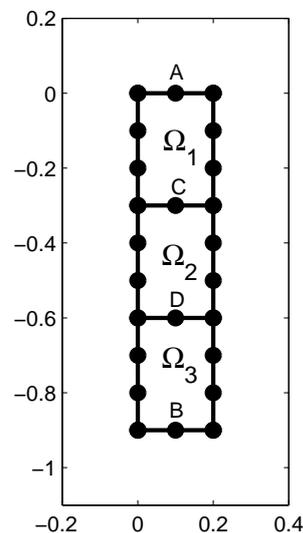


Figura 4.1.13: Tridominio associato al problema misto interno precedentemente descritto.

- $\Delta x = 0.1$  per la discretizzazione di tutti i bordi spaziali dei sottodomini e supponiamo che ciascuno di essi abbia per base due elementi e per altezza tre elementi, nel rispetto della proporzione prima fissata;
- $\Delta t = 0.1$  per la discretizzazione temporale dell'intervallo  $[0, 10]$ ;
- $T_1 = T_2 = T_3 = 1$ ;
- $c_1 = c_2 = c_3 = 1$  (figura 4.1.14);
- $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 4$  (figura 4.1.15).

Generalizzando quanto già osservato nel caso di un bidominio, notiamo che rispetto ai domini  $\Omega_1$  ed  $\Omega_2$  dovremo risolvere un problema con condizioni al bordo esclusivamente di tipo Neumann, mentre rispetto ad  $\Omega_3$  le condizioni al bordo sono di tipo misto. Anche in questo caso risulta naturale confrontare le soluzioni con quelle ottenute nel corrispondente problema monodimensionale di una corda suddivisa in tre porzioni di lunghezza equivalente. I risultati numerici si rivelano pienamente soddisfacenti.

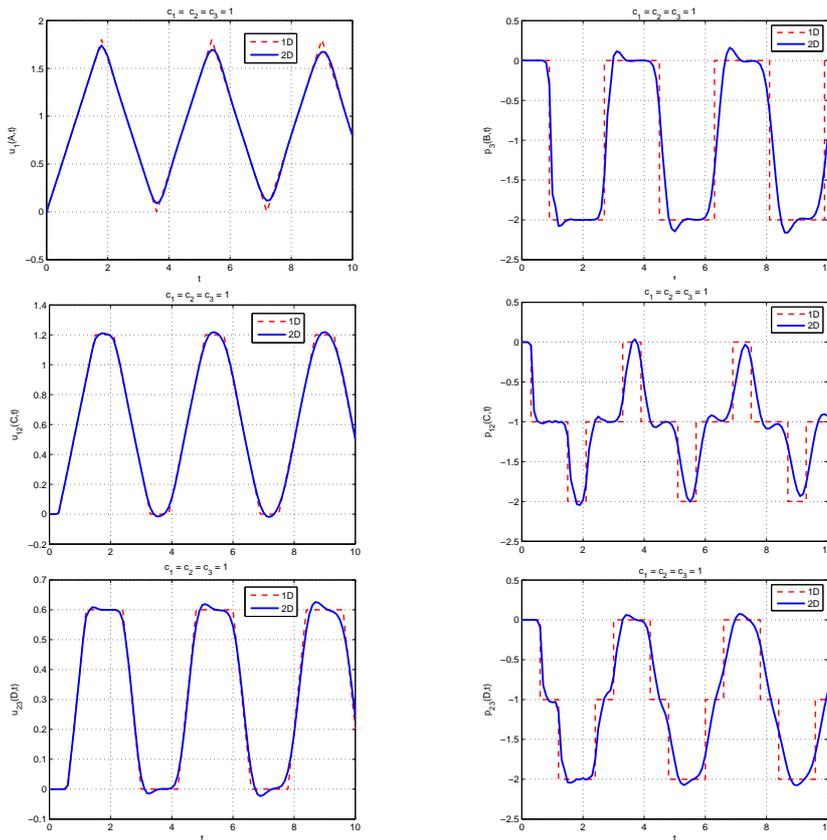


Figura 4.1.14: Soluzioni approssimate riferite al bidominio in figura 4.1.13, nel caso in cui i sottodomini posseggano le stesse caratteristiche fisiche.

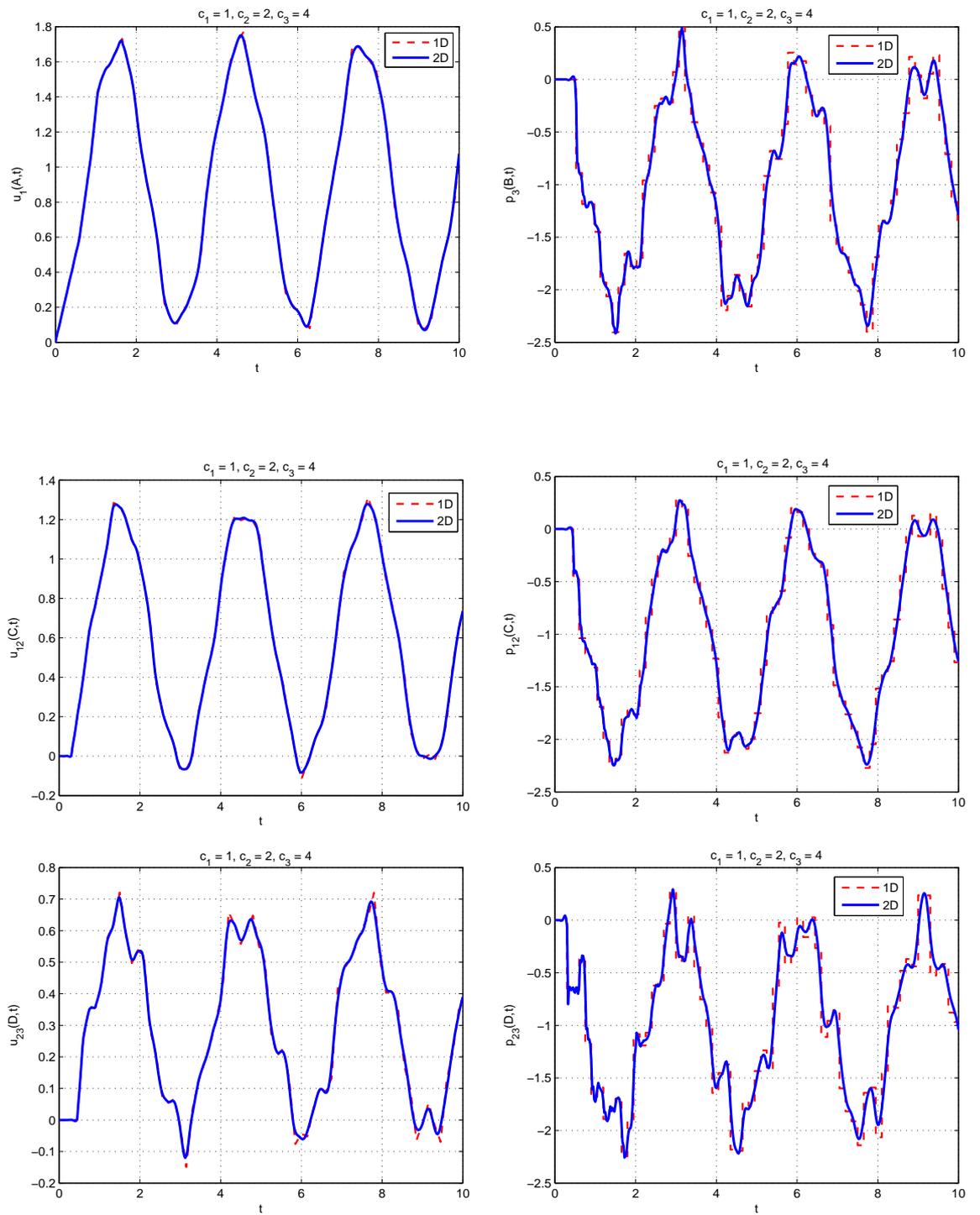


Figura 4.1.15: Soluzioni approssimate riferite al bidominio in figura 4.1.13, nel caso in cui le velocità di propagazione d'onda dei vari sottodomini siano differenti.

## 4.2 Problema di Neumann esterno

Consideriamo ora un problema di Neumann su un dominio esterno ad una cavità circolare di raggio unitario, sul cui bordo è assegnato il dato di Neumann  $\bar{p}(\mathbf{x}, t) = H[t]$ . Tale problema test è tratto da [1].

### 4.2.1 Il caso di un monodominio

Supponiamo dapprima che la porzione illimitata di piano esterna alla cavità sia omogenea. Considereremo cioè il caso in cui la divisione del dominio  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  riportata in figura 4.2.1 sia puramente fittizia. Studiamo

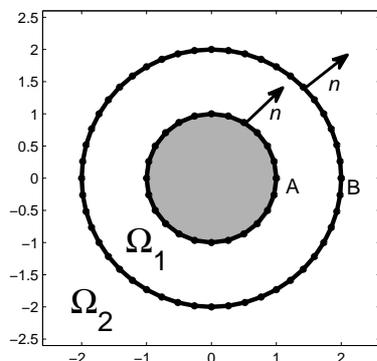


Figura 4.2.1: Dominio esterno ad una cavità di raggio unitario

numericamente il problema fissando:

- una mesh uniforme costituita da 24 elementi rettilinei di lunghezza  $\Delta x \simeq 0.26$  per la discretizzazione spaziale del bordo della cavità. Poiché il raggio dell'interfaccia fittizia è doppio rispetto al raggio del foro e vogliamo ottenere una mesh spaziale globalmente uniforme, approssimiamo l'interfaccia con 48 elementi rettilinei;
- l'intervallo temporale  $[0, 10]$ , suddiviso in 40 step di ampiezza  $\Delta t = 0.25$ , in modo tale che  $\Delta t/\Delta x \simeq 1$ ;
- $T = 1$ ;
- $c = 1$  (figura 4.2.2 a sinistra),  $c = 2$  (figura 4.2.2 a destra).

Dal confronto dei due grafici in figura 4.2.2, notiamo innanzitutto che, a parità di tempo, la soluzione  $u(\mathbf{x}, t)$  relativa ai bordi del dominio in cui  $c = 2$  raggiunge quote più elevate rispetto al caso in cui  $c = 1$ .

Osserviamo inoltre che, coerentemente con quanto è lecito aspettarsi, il punto  $B$  dell'interfaccia fittizia, situato a distanza unitaria dal punto  $A$  della

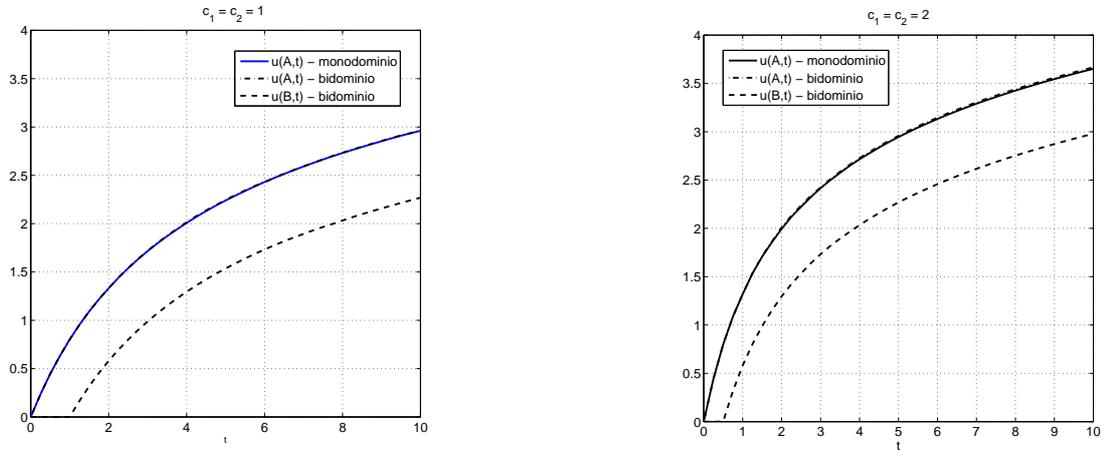


Figura 4.2.2: Grafici della soluzione  $u(\mathbf{x}, t)$  per un monodominio esterno ad una cavità di raggio unitario

circonferenza, viene raggiunto dalla perturbazione al tempo  $t = 1$  nel caso in cui  $c = 1$ , al tempo  $t = 0.5$  nel caso in cui  $c = 2$ .

#### 4.2.2 Il caso di un bidominio

Quando il dominio illimitato esterno non è omogeneo, abbiamo a che fare con un problema definito su un multidominio.

Supponiamo in particolare che la zona esterna sia divisa in una corona circolare (limitata)  $\Omega_1$ , il cui il raggio maggiore vale due (doppio rispetto al raggio minore) ed in una zona ad essa complementare (illimitata)  $\Omega_2$  (figura 4.2.1). Fissiamo ora i parametri di discretizzazione:

- per la decomposizione dei contorni spaziali consideriamo una mesh uniforme di ampiezza  $\Delta x \simeq 0.26$ , ottenuta dividendo la circonferenza di raggio unitario in 24 elementi rettilinei e la circonferenza di raggio doppio in 48 elementi rettilinei;
- per la decomposizione temporale, consideriamo l'intervallo  $[0, 20]$  suddiviso in 80 istanti temporali di valore  $\Delta t = 0.25$  (figura 4.2.3) oppure consideriamo l'intervallo  $[0, 10]$  suddiviso in 80 istanti temporali di valore  $\Delta t = 0.125$  (figura 4.2.4);
- $T_1 = T_2 = 1$ ;
- $c_1 = 1, c_2 = 2$  (figura 4.2.3) oppure  $c_1 = 2, c_2 = 1$  (figura 4.2.4);

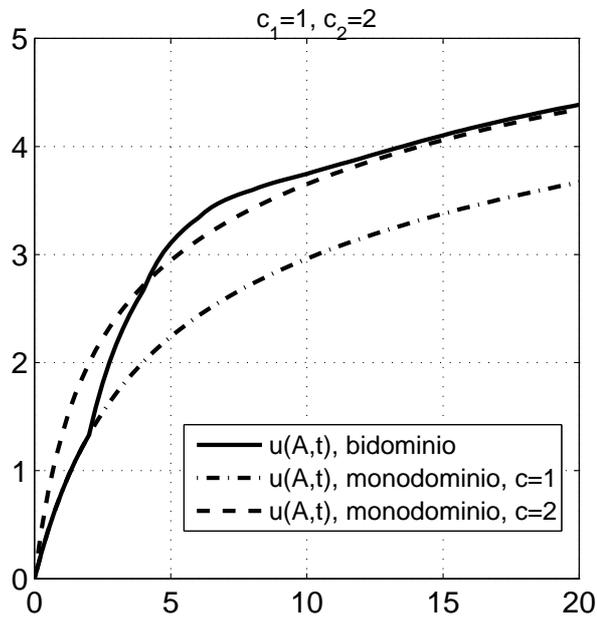


Figura 4.2.3: Spostamento  $u(x, t)$  nei punti indicati in figura 4.2.1.

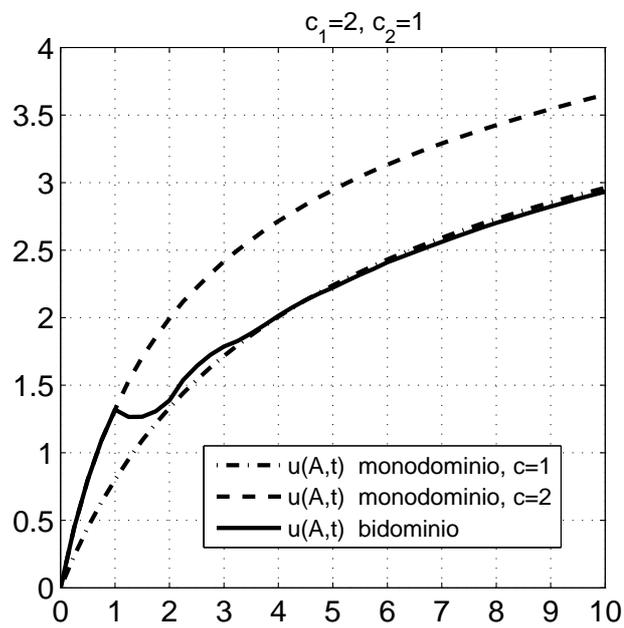


Figura 4.2.4: Spostamento  $u(x, t)$  nei punti indicati in figura 4.2.1.

Osserviamo che, anche in questo caso, i risultati ottenuti sono coerenti con quanto è lecito aspettarsi. Sia in figura 4.2.3 che in figura 4.2.4 notiamo che,

per gli istanti temporali in cui la perturbazione è localizzata nel primo dominio, la soluzione  $u(\mathbf{x}, t)$  nel punto  $A$  considerato si comporta come nel caso di un monodominio con le stesse caratteristiche fisiche di  $\Omega_1$ . Quando l'onda attraversa l'interfaccia si verificano fenomeni di diffrazione e riflessione e pertanto il valore della soluzione non è più così chiaramente assimilabile al caso di un qualche monodominio. All'aumentare del tempo, definitivamente, l'onda nel punto  $A$  si comporta come nel caso di un monodominio con le stesse caratteristiche fisiche di  $\Omega_2$ .

### 4.2.3 Il caso di un bidominio non simmetrico

Generalizziamo le considerazioni compiute nel caso del precedente bidominio, posizionando i due sottodomini in modo non più simmetrico. In particolare, consideriamo dapprima una cavità circolare di raggio unitario, centrata nel punto  $(1.5, 0)$ . Il dominio  $\Omega$  del problema è costituito dalla porzione illimitata di piano esterna alla circonferenza. Supponiamo che tale dominio possa essere non globalmente omogeneo, ma che sia piuttosto l'unione di due sottodomini  $\Omega_1$  ed  $\Omega_2$  localmente omogenei. Il sottodominio  $\Omega_1$  è un cerchio di raggio 3, centrato nell'origine (da cui rimane esclusa la cavità di raggio unitario). Il sottodominio  $\Omega_2$  è definito dalla differenza  $\Omega \setminus \Omega_1$  (figura 4.2.5 a sinistra). Per la discretizzazione fissiamo:

- una mesh spaziale uniforme di ampiezza  $\Delta x \simeq 0.26$  per tutti i contorni del problema. Pertanto il bordo del foro è suddiviso in 24 elementi rettilinei, mentre l'interfaccia in 72 elementi rettilinei;
- l'intervallo temporale  $[0, 10]$ , suddiviso in 40 sottointervalli di ampiezza  $\Delta t = 0.25$ ;
- $T_1 = T_2 = 1$ ;
- $c_1 = c_2 = 1$  (figura 4.2.5 a destra).

In questa prima simulazione consideriamo di fatto un bidominio fittizio, in quanto le caratteristiche fisiche dei due sottodomini che lo compongono sono identiche. Consideriamo quindi il caso duale rispetto a quello appena descritto: esaminiamo cioè un problema esterno con condizioni al bordo di tipo Neumann e utilizziamo gli stessi parametri di discretizzazione prima fissati. Supponiamo però che la cavità circolare di raggio unitario sia ora centrata nel punto  $(-1.5, 0)$  (figura 4.2.6 a sinistra). Il grafico delle soluzioni è riportato in figura 4.2.6, a destra.

Come si può notare confrontando la figura 4.2.5 e la figura 4.2.6, la soluzione  $u(\mathbf{x}, t)$  calcolata nel punto  $C$  del primo problema test coincide la soluzione  $u(\mathbf{x}, t)$  calcolata nel punto  $D$  del secondo problema test. Reciprocamente, il grafico di  $u(D, t)$  per il primo problema coincide con il grafico di  $u(C, t)$  per il secondo problema.

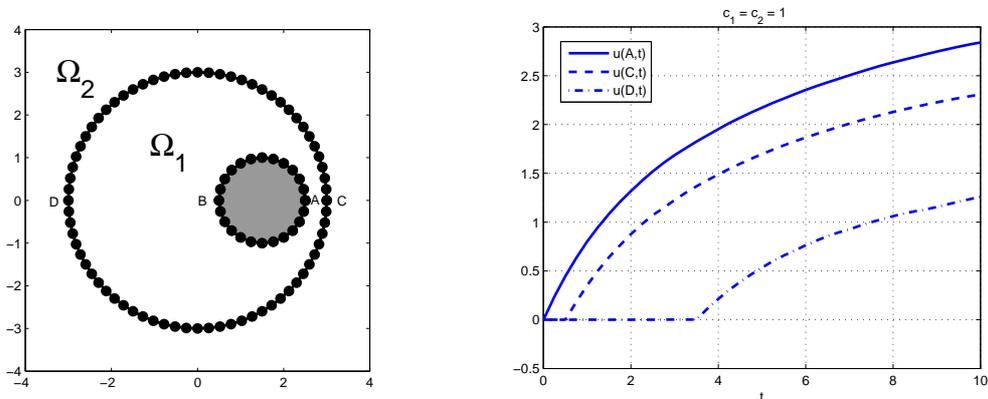


Figura 4.2.5: Bidominio in cui la cavità è traslata verso destra.

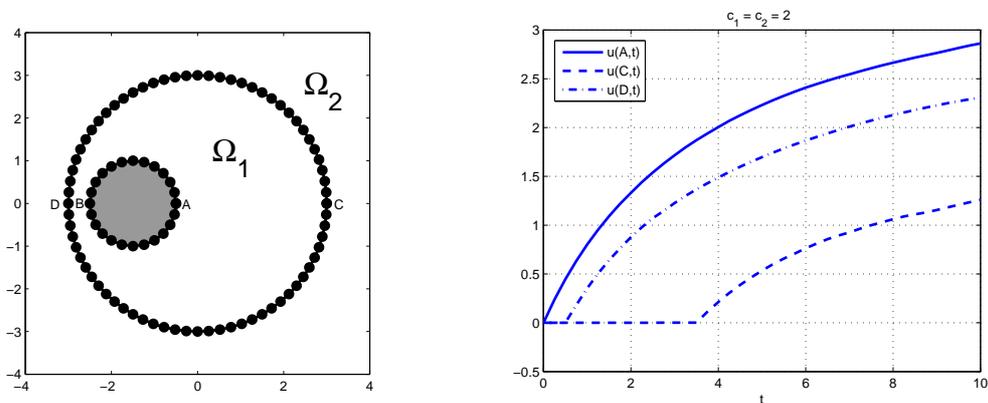


Figura 4.2.6: Bidominio in cui la cavità è traslata verso sinistra.

Osserviamo anche che, essendo  $c_1 = c_2 = 1$ , i punti  $C$  e  $D$  situati sull'interfaccia fittizia vengono investiti dalla perturbazione all'istante di tempo  $t_k$  pari alla distanza del punto dal bordo del foro.

Concentriamoci infine sul primo tipo di multidominio, quello in cui il foro è traslato verso destra. In figura 4.2.7 riportiamo le soluzioni, riferite ai punti mostrati in figura 4.2.5 a sinistra, nel caso in cui  $c_1 = 2$  e  $c_2 = 1$  (consideriamo cioè l'analogo non simmetrico del problema le cui soluzioni sono riportate in figura 4.2.4).

Dal grafico della soluzione calcolata nel punto  $A$  risulta evidente che il comportamento dei punti situati sul bordo del foro unitario è inizialmente assimilabile a quello del caso di un analogo monodominio in cui  $c = 2$ . Tuttavia, quando l'onda raggiunge l'interfaccia, in parte attraversandola e in parte riflettendosi, la perturbazione che interessa il punto  $A$  risulta analoga a quella manifestata nel caso di un monodominio con velocità  $c = 1$ .

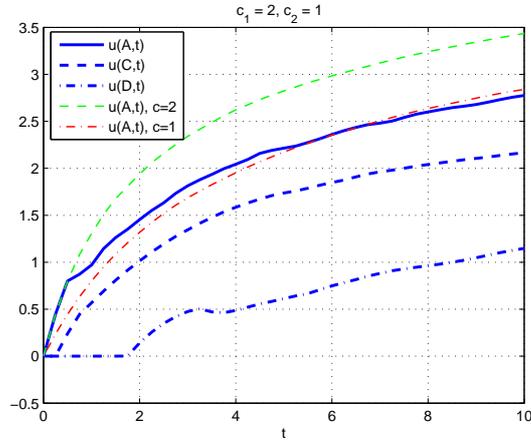


Figura 4.2.7: Bidominio in cui la cavità è traslata verso destra.

#### 4.2.4 Il caso di un tridominio

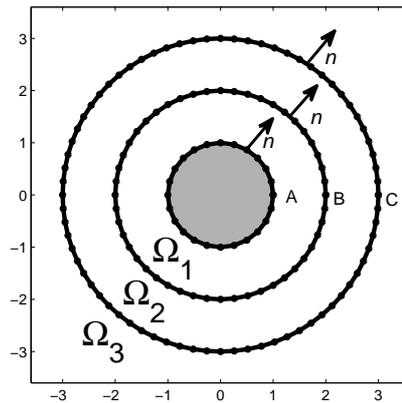


Figura 4.2.8: Tridominio esterno ad una cavità di raggio unitario

Analizziamo infine un problema esterno che ha come dominio spaziale  $\Omega$  la porzione di piano illimitata complementare ad un cerchio di raggio unitario. Supponiamo ora che tale dominio sia suddiviso in tre zone localmente omogenee: il primo sottodominio  $\Omega_1$  è una corona circolare avente raggio minore uguale ad uno (il bordo della cavità circolare su cui è assegnato il dato di Neumann) e raggio maggiore uguale a due. Il secondo sottodominio  $\Omega_2$  è una corona circolare concentrica ad  $\Omega_1$ , di raggio minore uguale a due (interfaccia comune al sottodominio  $\Omega_1$ ) e raggio maggiore uguale a tre. Infine, il terzo sottodominio è l'insieme illimitato  $\Omega_3 := \Omega \setminus \Omega_1 \setminus \Omega_2$ . L'unico suo bordo è l'interfaccia comune al sottodominio  $\Omega_2$  (figura 4.2.8).

Fissiamo i parametri di discretizzazione del problema in modo analogo a quanto fatto per il bidominio precedente:

- per la discretizzazione spaziale scegliamo una mesh uniforme di ampiezza  $\Delta x \simeq 0.26$ . Pertanto la circonferenza di raggio unitario è stata decomposta in 24 elementi rettilinei, quella di raggio due in 48 elementi rettilinei e quella di raggio tre in 72 elementi rettilinei;
- l'intervallo temporale considerato è  $[0, 10]$ , decomposto in 80 intervalli di ampiezza  $\Delta t = 0.125$ ;
- $T_1 = T_2 = 1$ ;
- $c_1 = c_2 = c_3 = 4$  (figura 4.2.9);
- $c_1 = 4, c_2 = 2, c_3 = 1$  (figura 4.2.10);

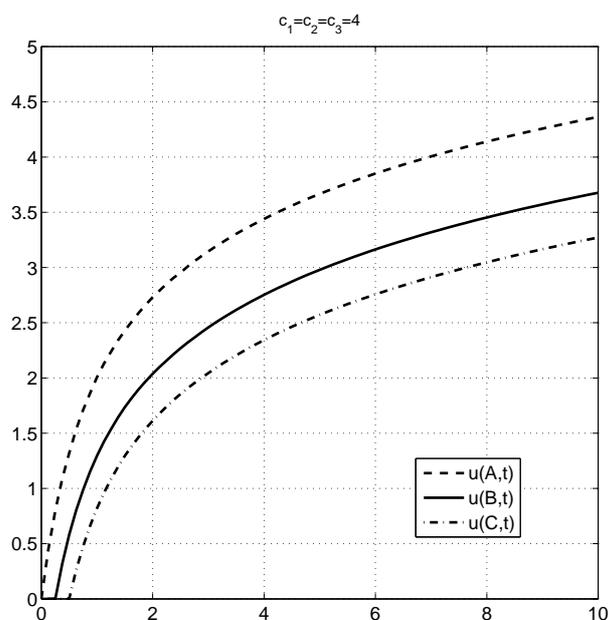


Figura 4.2.9: Soluzione  $u(\mathbf{x}, t)$  riferita al tridominio in figura 4.2.8

In figura 4.2.9 possiamo osservare i diversi tempi in cui i punti situati sui tre bordi del problema vengono interessati dalla perturbazione.

Analizzando la figura 4.2.10 possiamo invece estendere al caso di un tridominio le considerazioni svolte, relativamente alle figure 4.2.3 e 4.2.4, per un bidominio. Finchè la perturbazione interessa il sottodominio  $\Omega_1$ , il comportamento della soluzione nel punto  $A$  è analogo quanto avviene nel caso di un monodominio in cui la velocità di propagazione è  $c = 4$ ; dopo che il fronte d'onda ha attraversato la prima interfaccia e prima di raggiungere la seconda, l'onda in  $A$  si comporta similmente al caso di un monodominio con

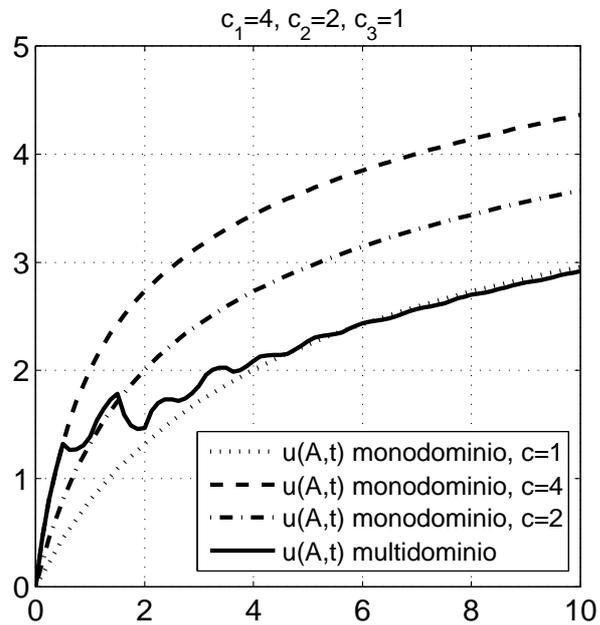


Figura 4.2.10: Soluzione  $u(\mathbf{x}, t)$  per diversi valori della velocità caratteristica del mezzo.

velocità di propagazione  $c = 2$ . Quando la perturbazione ha attraversato la seconda interfaccia, si presentano ulteriori fenomeni dovuti alla presenza di onde diffratte e riflesse. Infine, per tempi lunghi, quando la perturbazione interessa principalmente il sottodominio illimitato  $\Omega_3$ , il comportamento dell'onda in  $A$  risulta analogo a quello di un monodominio in cui la velocità di propagazione è  $c = 1$ .



# Appendice

Riportiamo una selezione di alcuni significativi codici *Fortran* realizzati per ottenere i risultati numerici descritti nel Capitolo 4.

Il programma principale *DBEM.for*, che costruisce la matrice associata alla discretizzazione del problema mediante il metodo di Galerkin energetico, è suddiviso in sottoprogrammi (*subroutines* e *functions*) con compiti specifici.

```
Program DBEM
```

```
Implicit double precision (a-h,o-z)
parameter (max=600,nderule=31,NS=3,nmax=2000)
integer n1,n2,n3,n4,n5,n6,n7,n8,n9,n10,n11,n
double precision r

dimension r(nmax,nmax)
dimension xde(-nderule:nderule),wde(-nderule:nderule)
common/derule/xde,wde,h
common/matrice/matrix
common/dim/n1,n2,n3,n4,n5,n6,n7,n8,n9,n10,n11,n

include 'commonD.h'
integer matrix(NS,NS)

call ReadDati

call SaveDati

open(102,file='matrice.asc',status='unknown')
open(103,file='matricetempo.asc',status='unknown')
open(0,file='MATRIX.dat',status='unknown')

read(0,*)dim
do 1,ii=1,dim
do 1,jj=1,dim
read(0,*)matrix(ii,jj)
1 continue
close(0)

jtempo=0
do 1000 itempo=0,Nt-1
```

```

    if (itempo.eq.0) then
    open (0,file='BlockMatrix.txt',status='unknown')
    open (100,file='BlockTnoti.txt',status='unknown')
    endif

    do 10 i=1,NN
    call MakeLi(i)
10  continue

    do 20 i=1,NN
    do 20 j=i,NN
    call MakeLij_ij(i,j)
20  continue

    do 30 i=1,NN
    do 30 j=1,NN
    call MakeLij_i(i,j)
30  continue

    do 40 i=1,NN
    call MakeLij_jk(i)
40  continue

    if (itempo.eq.0) then
    close(0)
    close(100)
    endif

    call ReadMatrice

    call MakeMatrice(r)

    if (itempo.eq.0) then
    write(102,*)n
    write(102,*)n1
    write(102,*)n2
    write(102,*)n3
    write(102,*)n4
    write(102,*)n5
    write(102,*)n6
    write(102,*)n7
    write(102,*)n8
    write(102,*)n9
    write(102,*)n10
    write(102,*)n11
    endif

    write(103,*)'tempo', itempo
    write(*,*)'tempo', itempo
    do 101 i=1,n
    do 101 j=1,n
    write(102,*)r(i,j)
    write(103,*)r(i,j),i,j

```

```

101     continue
1000    continue

      close(102)
      close(103)

      STOP
      END

```

Notiamo che la subroutine `ReadDat`, chiamata dal programma principale, ha il compito di leggere dal file `Contorno.dat` i dati relativi alla discretizzazione dei contorni e delle interfacce del problema. Nel file `Contorno.dat` sono anche elencate le condizioni al contorno assegnate sul problema. A titolo d'esempio, riportiamo il file relativo alla descrizione del problema di Neumann esterno per il tridominio in figura 4.2.8.

```

0.10000000000000000D+02      TEMPO FINALE
80                             NUMERO INTERVALLI TEMPORALI
3                              N. sottodomini
'1'
0                              N. rami Gamma u
1                              N. rami Gamma q
1                              N. rami Gamma interfaccia
0                              N. elementi Gamma u
24                             N. elementi Gamma q
'2'                             collegamento con interfaccia
48                             N. elementi con interfaccia
'3'                             collegamento con interfaccia
0                              N. elementi con interfaccia
0.10000000000000000D+01      costante
0.40000000000000000D+01      VELOCITA
  1.0000000000000000D+000    0.0000000000000000D+000
  9.659258262890683D-001    2.588190451025207D-001
  8.660254037844387D-001    4.999999999999999D-001
  7.071067811865476D-001    7.071067811865475D-001
  5.000000000000001D-001    8.660254037844386D-001
  2.588190451025210D-001    9.659258262890682D-001
  6.123233995736766D-017    1.000000000000000D+000
 -2.588190451025206D-001    9.659258262890683D-001
 -4.999999999999998D-001    8.660254037844387D-001
 -7.071067811865475D-001    7.071067811865476D-001
 -8.660254037844385D-001    5.000000000000003D-001
 -9.659258262890682D-001    2.588190451025210D-001
 -1.000000000000000D+000    0.000000000000000D+000
 -9.659258262890682D-001    -2.588190451025212D-001
 -8.660254037844386D-001    -5.000000000000001D-001
 -7.071067811865474D-001    -7.071067811865477D-001
 -4.999999999999996D-001    -8.660254037844388D-001
 -2.588190451025206D-001    -9.659258262890683D-001
  0.000000000000000D+000    -1.000000000000000D+000
  2.588190451025211D-001    -9.659258262890682D-001
  5.000000000000001D-001    -8.660254037844386D-001
  7.071067811865474D-001    -7.071067811865477D-001

```

8.660254037844388D-001 -4.999999999999997D-001  
 9.659258262890683D-001 -2.588190451025207D-001  
 2.000000000000000D+000 0.000000000000000D+000  
 1.982889722747621D+000 -2.610523844401034D-001  
 1.931851652578137D+000 -5.176380902050414D-001  
 1.847759065022573D+000 -7.653668647301808D-001  
 1.732050807568877D+000 -1.000000000000001D+000  
 1.586706680582470D+000 -1.217522858017442D+000  
 1.414213562373095D+000 -1.414213562373095D+000  
 1.217522858017441D+000 -1.586706680582470D+000  
 1.000000000000000D+000 -1.732050807568877D+000  
 7.653668647301800D-001 -1.847759065022573D+000  
 5.176380902050406D-001 -1.931851652578137D+000  
 2.610523844401025D-001 -1.982889722747621D+000  
 0.000000000000000D+000 -2.000000000000000D+000  
 -2.610523844401033D-001 -1.982889722747621D+000  
 -5.176380902050413D-001 -1.931851652578137D+000  
 -7.653668647301790D-001 -1.847759065022574D+000  
 -9.999999999999992D-001 -1.732050807568878D+000  
 -1.217522858017442D+000 -1.586706680582470D+000  
 -1.414213562373095D+000 -1.414213562373095D+000  
 -1.586706680582470D+000 -1.217522858017441D+000  
 -1.732050807568877D+000 -1.000000000000000D+000  
 -1.847759065022574D+000 -7.653668647301793D-001  
 -1.931851652578137D+000 -5.176380902050416D-001  
 -1.982889722747621D+000 -2.610523844401035D-001  
 -2.000000000000000D+000 0.000000000000000D+000  
 -1.982889722747621D+000 2.610523844401040D-001  
 -1.931851652578136D+000 5.176380902050420D-001  
 -1.847759065022573D+000 7.653668647301806D-001  
 -1.732050807568877D+000 1.000000000000001D+000  
 -1.586706680582470D+000 1.217522858017442D+000  
 -1.414213562373094D+000 1.414213562373096D+000  
 -1.217522858017441D+000 1.586706680582471D+000  
 -9.999999999999996D-001 1.732050807568877D+000  
 -7.653668647301795D-001 1.847759065022574D+000  
 -5.176380902050413D-001 1.931851652578137D+000  
 -2.610523844401032D-001 1.982889722747621D+000  
 0.000000000000000D+000 2.000000000000000D+000  
 2.610523844401034D-001 1.982889722747621D+000  
 5.176380902050415D-001 1.931851652578137D+000  
 7.653668647301797D-001 1.847759065022574D+000  
 1.000000000000000D+000 1.732050807568877D+000  
 1.217522858017441D+000 1.586706680582470D+000  
 1.414213562373095D+000 1.414213562373095D+000  
 1.586706680582470D+000 1.217522858017441D+000  
 1.732050807568877D+000 9.999999999999999D-001  
 1.847759065022574D+000 7.653668647301796D-001  
 1.931851652578137D+000 5.176380902050415D-001  
 1.982889722747621D+000 2.610523844401032D-001

1 2 'q' 2 'c' 0.00D+00 0.00D+00 1 '1'  
 2 3 'q' 2 'c' 0.00D+00 0.00D+00 1 '1'

3	4	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
4	5	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
5	6	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
6	7	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
7	8	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
8	9	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
9	10	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
10	11	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
11	12	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
12	13	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
13	14	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
14	15	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
15	16	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
16	17	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
17	18	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
18	19	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
19	20	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
20	21	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
21	22	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
22	23	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
23	24	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
24	1	'q'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	1 '1'
25	26	'i'	2	'p'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
26	27	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
27	28	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
28	29	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
29	30	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
30	31	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
31	32	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
32	33	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
33	34	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
34	35	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
35	36	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
36	37	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
37	38	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
38	39	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
39	40	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
40	41	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
41	42	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
42	43	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
43	44	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
44	45	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
45	46	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
46	47	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
47	48	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
48	49	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
49	50	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
50	51	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
51	52	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
52	53	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
53	54	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
54	55	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
55	56	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
56	57	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'

57	58	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
58	59	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
59	60	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
60	61	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
61	62	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
62	63	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
63	64	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
64	65	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
65	66	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
66	67	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
67	68	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
68	69	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
69	70	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
70	71	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
71	72	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
72	25	'i'	2	'u'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
'2'							
0				N. rami Gamma u			
0				N. rami Gamma q			
2				N. rami Gamma interfaccia			
0				N. elementi Gamma u			
0				N. elementi Gamma q			
'1'				collegamento con interfaccia			
48				N. elementi con interfaccia			
'3'				collegamento con interfaccia			
72				N. elementi con interfaccia			
0.1000000000000000D+01				costante			
0.2000000000000000D+01				VELOCITA			
2.0000000000000000D+000				0.0000000000000000D+000			
1.982889722747621D+000				2.610523844401032D-001			
1.931851652578137D+000				5.176380902050415D-001			
1.847759065022574D+000				7.653668647301796D-001			
1.732050807568877D+000				9.999999999999999D-001			
1.586706680582470D+000				1.217522858017441D+000			
1.414213562373095D+000				1.414213562373095D+000			
1.217522858017441D+000				1.586706680582470D+000			
1.0000000000000000D+000				1.732050807568877D+000			
7.653668647301797D-001				1.847759065022574D+000			
5.176380902050419D-001				1.931851652578136D+000			
2.610523844401034D-001				1.982889722747621D+000			
0.0000000000000000D+000				2.0000000000000000D+000			
-2.610523844401028D-001				1.982889722747621D+000			
-5.176380902050413D-001				1.931851652578137D+000			
-7.653668647301790D-001				1.847759065022574D+000			
-9.999999999999996D-001				1.732050807568877D+000			
-1.217522858017441D+000				1.586706680582471D+000			
-1.414213562373095D+000				1.414213562373095D+000			
-1.586706680582470D+000				1.217522858017442D+000			
-1.732050807568877D+000				1.000000000000001D+000			
-1.847759065022574D+000				7.653668647301798D-001			
-1.931851652578136D+000				5.176380902050420D-001			
-1.982889722747621D+000				2.610523844401040D-001			
-2.0000000000000000D+000				0.0000000000000000D+000			
-1.982889722747621D+000				-2.610523844401035D-001			

-1.931851652578137D+000    -5.176380902050416D-001  
 -1.847759065022573D+000    -7.653668647301801D-001  
 -1.732050807568877D+000    -1.000000000000000D+000  
 -1.586706680582470D+000    -1.217522858017441D+000  
 -1.414213562373095D+000    -1.414213562373095D+000  
 -1.217522858017442D+000    -1.586706680582470D+000  
 -9.999999999999992D-001    -1.732050807568878D+000  
 -7.653668647301790D-001    -1.847759065022574D+000  
 -5.176380902050413D-001    -1.931851652578137D+000  
 -2.610523844401033D-001    -1.982889722747621D+000  
 0.000000000000000D+000    -2.000000000000000D+000  
 2.610523844401043D-001    -1.982889722747621D+000  
 5.176380902050406D-001    -1.931851652578137D+000  
 7.653668647301800D-001    -1.847759065022573D+000  
 1.000000000000000D+000    -1.732050807568877D+000  
 1.217522858017441D+000    -1.586706680582470D+000  
 1.414213562373095D+000    -1.414213562373095D+000  
 1.586706680582470D+000    -1.217522858017442D+000  
 1.732050807568878D+000    -9.999999999999993D-001  
 1.847759065022574D+000    -7.653668647301791D-001  
 1.931851652578137D+000    -5.176380902050414D-001  
 1.982889722747621D+000    -2.610523844401034D-001  
 3.000000000000000D+000    0.000000000000000D+000  
 2.988584094275237D+000    -2.614672282429750D-001  
 2.954423259036624D+000    -5.209445330007911D-001  
 2.897777478867205D+000    -7.764571353075620D-001  
 2.819077862357725D+000    -1.026060429977006D+000  
 2.718923361109949D+000    -1.267854785222100D+000  
 2.598076211353315D+000    -1.500000000000001D+000  
 2.457456132866975D+000    -1.720729309053140D+000  
 2.298133329356933D+000    -1.928362829059619D+000  
 2.121320343559642D+000    -2.121320343559643D+000  
 1.928362829059618D+000    -2.298133329356935D+000  
 1.720729309053138D+000    -2.457456132866975D+000  
 1.500000000000000D+000    -2.598076211353316D+000  
 1.267854785222097D+000    -2.718923361109951D+000  
 1.026060429977004D+000    -2.819077862357726D+000  
 7.764571353075609D-001    -2.897777478867205D+000  
 5.209445330007899D-001    -2.954423259036624D+000  
 2.614672282429736D-001    -2.988584094275237D+000  
 0.000000000000000D+000    -3.000000000000000D+000  
 -2.614672282429748D-001    -2.988584094275237D+000  
 -5.209445330007910D-001    -2.954423259036624D+000  
 -7.764571353075619D-001    -2.897777478867205D+000  
 -1.026060429977006D+000    -2.819077862357725D+000  
 -1.267854785222097D+000    -2.718923361109950D+000  
 -1.499999999999999D+000    -2.598076211353317D+000  
 -1.720729309053137D+000    -2.457456132866977D+000  
 -1.928362829059618D+000    -2.298133329356934D+000  
 -2.121320343559643D+000    -2.121320343559642D+000  
 -2.298133329356935D+000    -1.928362829059618D+000  
 -2.457456132866975D+000    -1.720729309053139D+000  
 -2.598076211353317D+000    -1.499999999999999D+000  
 -2.718923361109950D+000    -1.267854785222098D+000

-2.819077862357725D+000	-1.026060429977006D+000
-2.897777478867205D+000	-7.764571353075624D-001
-2.954423259036624D+000	-5.209445330007914D-001
-2.988584094275237D+000	-2.614672282429739D-001
-3.000000000000000D+000	0.000000000000000D+000
-2.988584094275237D+000	2.614672282429759D-001
-2.954423259036624D+000	5.209445330007921D-001
-2.897777478867205D+000	7.764571353075631D-001
-2.819077862357725D+000	1.026060429977007D+000
-2.718923361109950D+000	1.267854785222099D+000
-2.598076211353316D+000	1.500000000000001D+000
-2.457456132866975D+000	1.720729309053139D+000
-2.298133329356934D+000	1.928362829059618D+000
-2.121320343559642D+000	2.121320343559643D+000
-1.928362829059617D+000	2.298133329356935D+000
-1.720729309053138D+000	2.457456132866976D+000
-1.499999999999999D+000	2.598076211353316D+000
-1.267854785222098D+000	2.718923361109950D+000
-1.026060429977006D+000	2.819077862357725D+000
-7.764571353075619D-001	2.897777478867205D+000
-5.209445330007902D-001	2.954423259036624D+000
-2.614672282429740D-001	2.988584094275237D+000
0.000000000000000D+000	3.000000000000000D+000
2.614672282429751D-001	2.988584094275237D+000
5.209445330007912D-001	2.954423259036624D+000
7.764571353075629D-001	2.897777478867205D+000
1.026060429977006D+000	2.819077862357725D+000
1.267854785222099D+000	2.718923361109949D+000
1.500000000000000D+000	2.598076211353316D+000
1.720729309053138D+000	2.457456132866975D+000
1.928362829059618D+000	2.298133329356934D+000
2.121320343559643D+000	2.121320343559642D+000
2.298133329356934D+000	1.928362829059618D+000
2.457456132866975D+000	1.720729309053138D+000
2.598076211353316D+000	1.500000000000000D+000
2.718923361109950D+000	1.267854785222098D+000
2.819077862357725D+000	1.026060429977006D+000
2.897777478867205D+000	7.764571353075622D-001
2.954423259036624D+000	5.209445330007910D-001
2.988584094275237D+000	2.614672282429745D-001

1	2	'i'	2	'p'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
2	3	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
3	4	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
4	5	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
5	6	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
6	7	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
7	8	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
8	9	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
9	10	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
10	11	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
11	12	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
12	13	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
13	14	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'

14	15	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
15	16	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
16	17	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
17	18	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
18	19	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
19	20	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
20	21	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
21	22	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
22	23	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
23	24	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
24	25	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
25	26	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
26	27	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
27	28	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
28	29	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
29	30	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
30	31	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
31	32	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
32	33	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
33	34	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
34	35	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
35	36	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
36	37	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
37	38	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
38	39	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
39	40	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
40	41	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
41	42	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
42	43	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
43	44	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
44	45	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
45	46	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
46	47	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
47	48	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
48	1	'i'	2	'u'	0.00D+00	0.00D+00	0 '1'
49	50	'i'	2	'p'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
50	51	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
51	52	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
52	53	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
53	54	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
54	55	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
55	56	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
56	57	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
57	58	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
58	59	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
59	60	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
60	61	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
61	62	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
62	63	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
63	64	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
64	65	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
65	66	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
66	67	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
67	68	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'

68	69	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
69	70	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
70	71	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
71	72	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
72	73	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
73	74	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
74	75	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
75	76	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
76	77	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
77	78	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
78	79	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
79	80	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
80	81	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
81	82	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
82	83	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
83	84	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
84	85	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
85	86	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
86	87	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
87	88	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
88	89	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
89	90	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
90	91	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
91	92	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
92	93	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
93	94	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
94	95	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
95	96	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
96	97	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
97	98	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
98	99	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
99	100	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
100	101	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
101	102	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
102	103	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
103	104	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
104	105	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
105	106	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
106	107	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
107	108	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
108	109	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
109	110	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
110	111	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
111	112	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
112	113	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
113	114	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
114	115	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
115	116	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
116	117	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
117	118	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
118	119	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
119	120	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
120	49	'i'	2	'u'	0.00D+00	0.00D+00	0 '3'
		'3'					

0	N. rami Gamma u
0	N. rami Gamma q
1	N. rami Gamma interfaccia
0	N. elementi Gamma u
0	N. elementi Gamma u
'1'	collegamento con interfaccia
0	N. elementi con interfaccia
'2'	collegamento con interfaccia
72	N. elementi con interfaccia
0.1000000000000000D+01	costante
0.1000000000000000D+01	VELOCITA
3.000000000000000D+000	0.000000000000000D+000
2.988584094275237D+000	2.614672282429745D-001
2.954423259036624D+000	5.209445330007910D-001
2.897777478867205D+000	7.764571353075622D-001
2.819077862357725D+000	1.026060429977006D+000
2.718923361109950D+000	1.267854785222098D+000
2.598076211353316D+000	1.500000000000000D+000
2.457456132866975D+000	1.720729309053138D+000
2.298133329356934D+000	1.928362829059618D+000
2.121320343559643D+000	2.121320343559642D+000
1.928362829059618D+000	2.298133329356934D+000
1.720729309053138D+000	2.457456132866975D+000
1.500000000000000D+000	2.598076211353316D+000
1.267854785222098D+000	2.718923361109950D+000
1.026060429977006D+000	2.819077862357725D+000
7.764571353075622D-001	2.897777478867205D+000
5.209445330007912D-001	2.954423259036624D+000
2.614672282429751D-001	2.988584094275237D+000
0.000000000000000D+000	3.000000000000000D+000
-2.614672282429740D-001	2.988584094275237D+000
-5.209445330007909D-001	2.954423259036624D+000
-7.764571353075619D-001	2.897777478867205D+000
-1.026060429977006D+000	2.819077862357725D+000
-1.267854785222098D+000	2.718923361109950D+000
-1.499999999999999D+000	2.598076211353316D+000
-1.720729309053138D+000	2.457456132866976D+000
-1.928362829059618D+000	2.298133329356934D+000
-2.121320343559642D+000	2.121320343559643D+000
-2.298133329356934D+000	1.928362829059618D+000
-2.457456132866975D+000	1.720729309053139D+000
-2.598076211353316D+000	1.500000000000000D+000
-2.718923361109950D+000	1.267854785222099D+000
-2.819077862357725D+000	1.026060429977007D+000
-2.897777478867205D+000	7.764571353075631D-001
-2.954423259036624D+000	5.209445330007921D-001
-2.988584094275237D+000	2.614672282429746D-001
-3.000000000000000D+000	0.000000000000000D+000
-2.988584094275237D+000	-2.614672282429752D-001
-2.954423259036624D+000	-5.209445330007914D-001
-2.897777478867205D+000	-7.764571353075624D-001
-2.819077862357725D+000	-1.026060429977006D+000
-2.718923361109950D+000	-1.267854785222098D+000
-2.598076211353316D+000	-1.500000000000000D+000

-2.457456132866975D+000	-1.720729309053139D+000
-2.298133329356935D+000	-1.928362829059618D+000
-2.121320343559643D+000	-2.121320343559642D+000
-1.928362829059616D+000	-2.298133329356936D+000
-1.720729309053137D+000	-2.457456132866977D+000
-1.4999999999999999D+000	-2.598076211353317D+000
-1.267854785222097D+000	-2.718923361109950D+000
-1.026060429977006D+000	-2.819077862357725D+000
-7.764571353075619D-001	-2.897777478867205D+000
-5.209445330007910D-001	-2.954423259036624D+000
-2.614672282429748D-001	-2.988584094275237D+000
0.000000000000000D+000	-3.000000000000000D+000
2.614672282429736D-001	-2.988584094275237D+000
5.209445330007899D-001	-2.954423259036624D+000
7.764571353075609D-001	-2.897777478867205D+000
1.026060429977004D+000	-2.819077862357726D+000
1.267854785222099D+000	-2.718923361109949D+000
1.500000000000000D+000	-2.598076211353316D+000
1.720729309053138D+000	-2.457456132866975D+000
1.928362829059618D+000	-2.298133329356935D+000
2.121320343559642D+000	-2.121320343559643D+000
2.298133329356933D+000	-1.928362829059619D+000
2.457456132866975D+000	-1.720729309053140D+000
2.598076211353315D+000	-1.500000000000001D+000
2.718923361109950D+000	-1.267854785222098D+000
2.819077862357725D+000	-1.026060429977006D+000
2.897777478867205D+000	-7.764571353075620D-001
2.954423259036624D+000	-5.209445330007911D-001
2.988584094275237D+000	-2.614672282429750D-001

1	2	'i'	2	'p'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
2	3	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
3	4	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
4	5	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
5	6	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
6	7	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
7	8	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
8	9	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
9	10	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
10	11	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
11	12	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
12	13	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
13	14	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
14	15	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
15	16	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
16	17	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
17	18	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
18	19	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
19	20	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
20	21	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
21	22	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
22	23	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
23	24	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
24	25	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'

25	26	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
26	27	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
27	28	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
28	29	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
29	30	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
30	31	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
31	32	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
32	33	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
33	34	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
34	35	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
35	36	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
36	37	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
37	38	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
38	39	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
39	40	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
40	41	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
41	42	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
42	43	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
43	44	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
44	45	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
45	46	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
46	47	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
47	48	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
48	49	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
49	50	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
50	51	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
51	52	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
52	53	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
53	54	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
54	55	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
55	56	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
56	57	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
57	58	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
58	59	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
59	60	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
60	61	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
61	62	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
62	63	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
63	64	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
64	65	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
65	66	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
66	67	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
67	68	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
68	69	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
69	70	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
70	71	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
71	72	'i'	2	'c'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'
72	1	'i'	2	'u'	0.00D+00	0.00D+00	0 '2'

Notiamo che sono fornite le coordinate di tutti i nodi della decomposizione. Tali coordinate vengono poi classificate, in particolare, in base al numero di elemento che individuano, al tipo di bordo (Dirichlet, Neumann, interfaccia)

cui appartengono (mediante, rispettivamente, le lettere 'u', 'q', 'i'), al grado aumentato di uno delle funzioni di forma definite su di esse.

Osserviamo anche che il senso orario e/o antiorario con cui vengono scritte le coordinate dei nodi di un contorno chiuso determina se il dominio spaziale del problema è, rispettivamente, interno e/o esterno a tale curva chiusa.

Tali dati sono poi salvati in appositi files dalla subroutine `SavaDati.for`. Altre notevoli subroutines che vengono chiamate dal programma principale `DBEM.for` sono le varie `MakeLi.for`, `MakeLij_i.for`, `MakeLij_ij.for`, `MakeLij_jk.for`, che hanno il compito di calcolare, mediante la tecnica *element by element* e mediante *assemblaggio* (paragrafo 2.4), gli elementi dei vari sottoblocchi matriciali. Sono specifiche per eseguire integrali doppi in spazio che hanno, rispettivamente, come dominio esterno e dominio interno elementi del contorno Dirichlet/Neumann, come dominio esterno un elemento di interfaccia e come dominio interno un elemento del contorno Dirichlet/Neumann, come dominio esterno e dominio interno elementi della stessa interfaccia, come dominio esterno e dominio interno elementi di interfacce diverse.

A loro volta, queste subroutines chiamano functions esterne che eseguono l'integrazione, distinguendo, al fine di trattare adeguatamente le sigolarità che si presentano, se gli elementi della mesh sui quali si deve integrare sono separati, contigui non allineati a destra o a sinistra, contigui allineati a destra o a sinistra, coincidenti.

Riportiamo infine la subroutine `qqcont.for` che calcola, ad ogni step temporale, integrali doppi su elementi contigui allineati della mesh del contorno, che concorrono alla formazione degli elementi del blocco matriciale  $\mathbb{E}_{pp}^{(\ell)}$ . In essa viene implementata la strategia di integrazione numerica descritta nel paragrafo 2.4.

```

Double precision function qqcont(li,lj,i,j,iS)

implicit double precision (a-h,o-z)
parameter (max=600,NS=3)
include 'common.h'
qqcont=0.d0

RQQcontDX_1=RQQcontDX_sub(li,lj,i,j,itempo,jtempo,iS)
RQQcontDX_2=RQQcontDX_sub(li,lj,i,j,itempo,(jtempo+1),iS)
RQQcontDX_4=RQQcontDX_sub(li,lj,i,j,(itempo+1),jtempo,iS)
RQQcontDX_5=RQQcontDX_sub(li,lj,i,j,(itempo+1),(jtempo+1),iS)

qqcont=RQQcontDX_1-RQQcontDX_2-RQQcontDX_4+RQQcontDX_5

RETURN
END

Double precision function RQQcontDX_sub(li,lj,i,j,itempo1,itempo2,iS)

implicit double precision (a-h,o-z)
Parameter (Ngauss=128)
dimension bi(Ngauss),endpts(2),ti(Ngauss),vi(Ngauss),tj(Ngauss),
$vj(Ngauss),ww(0:Ngauss),wwi(Ngauss),wwj(Ngauss)
dimension xx(4)
parameter (max=600,NS=3)

```

```

include 'common.h'
velC=velCC(iS)
RQQcontDX_sub=0.d0

if (itempo1-itempo2.le.0.d0) go to 1000

xx(1)=dmax1(0.d0,2.d0*gqDI(i)-velC*deltat*(itempo1-itempo2))
xx(2)=2.d0*gqDI(i)
xi1=xx(1)
xi2=xx(2)
xx(3)=2.d0*gqDI(j)+2.d0*gqDI(i)-velC*deltat*(itempo1-itempo2)

do 1 ii=2,3
app=xx(ii)
jj=ii-1
do while ((jj.ge.1).and.(xx(jj).gt.app))
x(jj+1)=xx(jj)
jj=jj-1
xx(jj+1)=app
enddo
1 continue

RQQcontDX_sub=0.d0

do 2 ii=1,3

if((xx(ii).ge.xi1).and.(xx(ii+1).le.xi2).and.(xx(ii+1).gt.(xx(ii)+10.d0**(-10))))then
RQQA=0.d0
RQQB=0.d0
RQQC=0.d0

B=xx(ii+1)
A=xx(ii)

if ((2.d0*gqDI(i)-xx(ii+1)).lt.10.d0**(-10)) then
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c   Integrale ipersingolare RQQA(..r^2)
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c   Primo integrale A1
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
RQQA1=0.d0
ip1=2
iq1=2
Ngaussi=16
Ngaussj=16

call gaussq(1,Ngaussi,0.d0,0.d0,0,endpts,bi,ti,vi)
call gaussq(1,Ngaussj,0.d0,0.d0,0,endpts,bi,tj,vj)

do 10 ki=1,Ngaussi
ti(ki)=(ti(ki)+1.d0)/2.d0
vi(ki)=vi(ki)/2.d0
10 continue

```

```

do 11 kj=1,Ngaussj
tj(kj)=(tj(kj)+1.d0)/2.d0
vj(kj)=vj(kj)/2.d0
11 continue

do 12, ki=1,Ngaussi
BB=dmin1(2.d0*gqDI(j), (B-A)*(ti(ki)-1.d0)+velC*deltat*(itempo1-
$itempo2))
sum=0.d0
if (BB.gt.10.d0**(-10)) then

do 13, kj=1,Ngaussj
r2=((B-A)*(1.d0-ti(ki))+BB*fi1(ip1,iq1,tj(kj)))**2
ff=Fiq(i,li, (B-A)*ti(ki)+A)*(dsqrt(dabs(velC*deltat*
$(itempo1-itempo2)**2-r2))*Fiq(j,lj, BB*fi1(ip1,iq1,tj(kj)))-
$velC*deltat*(itempo1-itempo2)*Fiq(j,lj,0.d0)
-$velC*deltat*(itempo1-itempo2)*DFiq(j,lj,0.d0)*BB
*$fi1(ip1,iq1,tj(kj)))/r2
sum=sum+vj(kj)*ff*BB*dfi1(ip1,iq1,tj(kj))
13 continue

else
goto 2000

endif

RQQA1=RQQA1+vi(ki)*(B-A)*sum
12 continue

RQQA1=RQQA1*deltat*(itempo1-itempo2)/
$(16.d0*datan(1.d0)*velC*deltat**2)
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c Secondo integrale A2
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
RQQA2=0.d0
sum=0.d0
Ngaussi=16
call gaussq(1,Ngaussi,0.d0,0.d0,0, endpts,bi,ti,vi)

do 20 ki=1,Ngaussi
tti=0.5d0*ti(ki)+0.5d0
vvi=vi(ki)/2.d0
BB=dmin1(2.d0*gqDI(j), (B-A)*(tti-1.d0)+
$velC*deltat*(itempo1-itempo2))
sum=sum-(vvi*(B-A)*Fiq(i,li, (B-A)*tti+A)*Fiq(j,lj,0.d0))
$/((B-A)*(1.d0-tti)+BB)
20 continue

sum=sum*deltat**2*(itempo1-itempo2)**2/
$(16.d0*datan(1.d0)*deltat**2)
RQQA2=sum
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
sum=0.d0

```





```

c      Integrale logaritmico RQQC(log(...))
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      ip=2
      iq=2
      Ngaussi=32
      Ngaussj=32
      call gaussq(1,Ngaussi,0.d0,0.d0,0,0,endpts,bi,ti,vi)
      call gaussq(1,Ngaussj,0.d0,0.d0,0,0,endpts,bi,tj,vj)
      RQQC=0.d0

      do 60 ki=1,Ngaussi
      tti=(ti(ki)+1.d0)/2.d0
      vvi=vi(ki)/2.d0
      BB=dmin1(2.d0*gqDI(j),(B-A)*tti+A+velC*deltat*
$(itempo1-itempo2)-2.d0*gqDI(i))
      sum=0.d0
      if (BB.gt.10.d0**(-10)) then

      do 61 kj=1,Ngaussj
      ttj=(tj(kj)+1.d0)/2.d0
      vvj=vj(kj)/2.d0
      r=2.d0*gqDI(i)-(B-A)*tti-A+BB*fi1(ip,iq,ttj)
      sum=sum+vvj*BB*(-dlog(dsqrt(dabs((
$velC*deltat*(itempo1-itempo2)**2-r**2))+velC*deltat*(itempo1-
$itempo2))) *Fiq(j,lj,BB*fi1(ip,iq,ttj))*dfi1(ip,iq,ttj)
61      continue
      endif

      RQQC=RQQC+vvi*(B-A)*Fiq(i,li,(B-A)*tti+A)*sum
60      continue

      RQQC=RQQC/(16.d0*datan(1.d0)*velC**2*deltat**2)

      RQQcontDX_sub=RQQcontDX_sub+RQQA+RQQB+RQQC

      else
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c      Integrale ipersingolare RQQA(.. /r^2)
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
2000 ip=2
      iq=2
      Ngaussi=32
      Ngaussj=32
      call gaussq(1,Ngaussi,0.d0,0.d0,0,0,endpts,bi,ti,vi)
      call gaussq(1,Ngaussj,0.d0,0.d0,0,0,endpts,bi,tj,vj)
      do 110, ki=1,Ngaussi
      BB=dmin1(2.d0*gqDI(j),(B-A)*(0.5d0*ti(ki)+0.5d0)+A+
$velC*deltat*(itempo1-itempo2)-2.d0*gqDI(i))
      do 111, kj=1,Ngaussj
      r=2.d0*gqDI(i)-(B-A)*(0.5d0*ti(ki)+0.5d0)-A+BB*
$fi1(ip,iq,(0.5d0*tj(kj)+0.5d0))
      RQQA=RQQA+vi(ki)*vj(kj)*Fiq(i,li,
$(B-A)*(0.5d0*ti(ki)+0.5d0)+A)*Fiq(j,lj,BB*fi1(ip,iq,(0.5d0*tj(kj)
$+0.5d0)))*dsqrt(dabs((velC*deltat*(itempo1-itempo2)**2-r**2)))/

```

```

$(r**2)*(B-A)*BB/4.d0*dfi1(ip,iq,(0.5d0*tj(kj)+0.5d0))
111 continue
110 continue
pig=datan(1.d0)*4.d0
coe=1.d0/(4.d0*pig*velC*deltat**2)
RQQA=RQQA*coe*deltat*(itempo1-itempo2)
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c   Integrale logaritmico RQQB(log(r))
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
  Ngaussi=32
  Ngaussj=32
  call gaussq(1,Ngaussi,0.d0,0.d0,0, endpts,bi,ti,vi)
  call gaussq(1,Ngaussj,0.d0,0.d0,0, endpts,bi,tj,vj)
  RQQB=0.d0
  do 120 ki=1,Ngaussi
  tti=(ti(ki)+1.d0)/2.d0
  vvi=vi(ki)/2.d0
  BB=dmin1(2.d0*gqDI(j),(B-A)*tti+A+velC*deltat*
$(itempo1-itempo2)-2.d0*gqDI(i))
  sum=0.d0
  if (BB.gt.10.d0**(-10)) then
  do 121 kj=1,Ngaussj
  ttj=(tj(kj)+1.d0)/2.d0
  vvj=vj(kj)/2.d0
  r=2.d0*gqDI(i)-(B-A)*tti-A+BB*ttj
  sum=sum+vvj*BB*(dlog(r))*Fiq(j,lj,BB*ttj)
121 continue
  endif

  RQQB=RQQB+vvi*(B-A)*Fiq(i,li,(B-A)*tti+A)*sum
120 continue
  RQQB=RQQB/(16.d0*datan(1.d0)*velC**2*deltat**2)
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c   Integrale logaritmico RQQC(log(...))
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
  ip=2
  iq=2
  Ngaussi=32
  Ngaussj=32
  call gaussq(1,Ngaussi,0.d0,0.d0,0, endpts,bi,ti,vi)
  call gaussq(1,Ngaussj,0.d0,0.d0,0, endpts,bi,tj,vj)
  RQQC=0.d0
  do 130 ki=1,Ngaussi
  tti=(ti(ki)+1.d0)/2.d0
  vvi=vi(ki)/2.d0
  BB=dmin1(2.d0*gqDI(j),(B-A)*tti+A+velC*deltat*
$(itempo1-itempo2)-2.d0*gqDI(i))

  sum=0.d0
  if (BB.gt.10.d0**(-10)) then
  do 131 kj=1,Ngaussj
  ttj=(tj(kj)+1.d0)/2.d0
  vvj=vj(kj)/2.d0
  r=2.d0*gqDI(i)-(B-A)*tti-A+BB*fi1(ip,iq,ttj)

```

```

        sum=sum+vvj*BB*(-dlog(dsqrt(dabs((
$velC*deltat*(itempo1-itempo2)**2-r**2))+velC*deltat*(itempo1-
$itempo2)))*Fiq(j,lj,BB*fi1(ip,iq,ttj))*dfi1(ip,iq,ttj)
131  continue
      endif
      RQQC=RQQC+vvi*(B-A)*Fiq(i,li,(B-A)*tti+A)*sum
130  continue
      RQQC=RQQC/(16.d0*datan(1.d0)*velC**2*deltat**2)

      RQQcontDX_sub=RQQcontDX_sub+RQQA+RQQB+RQQC

      endif
    endif
  2    continue

1000 RETURN
END

```



# Bibliografia

- [1] A.I. Abreu, J.A.M. Carrer, W.J. Mansur. Scalar wave propagation in 2D: a BEM formulation based on the operational quadrature method. *Eng. Anal. Bound. Elem.* **27**: 101-105 (2003).
- [2] A. Aimi, M. Diligenti, G. Monegato. New numerical integration schemes for applications of Galerkin BEM to 2D problems. *Int. J. Numer. Methods Eng.* **40**: 1977-1999 (1997).
- [3] A. Aimi, M. Anelli, M. Diligenti. *Formulazione del metodo di Galerkin simmetrico per equazioni integrali di contorno per problemi con interfaccia*. Quaderni del Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Parma (2005).
- [4] A. Aimi, M. Diligenti. A new space-time energetic formulation for wave propagation analysis in layered media by BEMs. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **75** : 1102 – 1132 (2008).
- [5] A. Aimi, M. Diligenti, C. Guardasoni, I. Mazzieri, S. Panizzi. An energy approach to space-time Galerkin BEM for wave propagation problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **80**, 1196-1240 (2009).
- [6] A. Aimi, M. Diligenti, C. Guardasoni. On the energetic Galerkin boundary element method applied to interior wave propagation problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, articolo in stampa (2010).
- [7] A. Aimi, M. Diligenti, C. Guardasoni. Numerical schemes for space-time hypersingular integrals in energetic Galerkin BEM. *Numer Alg*, **55**: 145-170 (2010).
- [8] A. Aimi, M. Diligenti, S. Panizzi. Energetic Galerkin BEM for wave propagation Neumann exterior problems. *CMES*, **58**: 185-219 (2010).
- [9] V.S. Almeida, J.B. de Paiva. Static analysis of soil/pile interaction in layered soil by BEM-BEM coupling. *Advances in Engineering Software* **38**, 835-845 (2007).

- [10] A. Bamberger, T. Ha Duong. Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé de la diffraction d'une onde acoustique. *Math. Methods Appl. Sci.*, **8**(3): 405-435 (1986).
- [11] A. Bamberger, T. Ha Duong. Formulation variationnelle pour le calcul de la diffraction d'une onde acoustique par une surface rigide. *Math. Methods Appl. Sci.*, **8**(4): 598-608 (1986).
- [12] E. Bécache. A variational boundary integral equation method for an elastodynamic antiplane crack. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **36**(6): 969-984 (1993).
- [13] E. Bécache. Equations intégrales pour l'équation des ondes. *Technical Report, INRIA*, Paris (2004).
- [14] C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, L.C. Wrobel. *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag (1984).
- [15] G. Chen, J. Zhou. *Boundary Element Methods*. Academic Press Ltd., London, (1992);
- [16] M. Costabel. *Principles of Boundary Element Methods*. Conferenze tenute in occasione del *First graduate summer course in computational physics*, Losanna (1986).
- [17] M. Costabel. Time-dependent problems with the boundary integral equation method, in *Encyclopedia of Computational Mechanics*, John Wiley & Sons (2004).
- [18] R. Courant, D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*, Volume I. John Wiley & Sons (1989).
- [19] A.T. De Hoop. A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems. *Appl. Sci. Res.*, **8**(1): 349-356 (1960).
- [20] D.G. Duffy. *Green's functions with applications*. Chapman & Hall/CRC (2001).
- [21] D.G. Duffy. *Transform Methods for Solving Partial Differential Equations*. Second Edition, Chapman & Hall/CRC (2004).
- [22] C. Guardasoni. *Wave Propagation Analysis with Boundary Element Method*. PhD thesis, Università degli Studi di Milano (2009).
- [23] A. Frangi, G. Novati. On the numerical stability of a time-domain elastodynamic analyses by BEM. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **173**: 403-417 (1999).
- [24] K.F. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids*. Dover (1991);

- [25] T. Ha Duong. On retarded potential boundary integral equations and their discretization, in: P. Davies, D. Duncan, P. Martin, B. Rynne. *Topics in Computational wave Propagation. Direct and Inverse Problems*. Springer (2003).
- [26] G. Maier, M. Diligenti, A. Carini. A variational approach to boundary element elastodynamic analysis and extension to multidomain problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **92**(2): 193-213 (1991).
- [27] W.J. Mansur, G. Yu, J.A.M. Carrer, S.T. Lie, E.F.N. Siqueira. The  $\theta$  scheme for time-domain BEM-FEM coupling applied to the 2-D scalar wave equation. *Commun. Numer. Meth. Engng* **16**:439-448 (2000).
- [28] G. Monegato. The numerical evaluation of 2D Cauchy principal value integral arising in boundary integral equation methods. *Math of Comp.* **62**(206): 765-777 (1994).
- [29] G. Monegato, L. Scuderi. Numerical integration of functions with boundary singularities. *J. Comput. Appl. Math.* **112**(1-2): 201-214 (1999).
- [30] W. Moser, H. Antes, G. Beer. Soil-structure interaction and wave propagation problems in 2D by Duhamel integral based approach and the convolution quadrature method. *Comput. Mech.* **36**: 431-443 (2005).
- [31] A. Quarteroni, A. Valli *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer (1994).
- [32] E. Reinoso, L.C. Wrobel, H. Power. Two-dimensional scattering of P, SV and Rayleigh waves: preliminary results for the Valley of Mexico. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **26**: 595-616 (1997).
- [33] M. Renardy, R.C. Rogers. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Springer (2004).
- [34] D.C. Rizos, Z. Wang. Coupled BEM-FEM solution for direct time domain soil-structure interaction analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **26**: 877-888 (2002).
- [35] S. Salsa. *Equazioni alle derivate parziali*. Springer (2003);
- [36] M. Sari, L. Demir. Wave Modelling Through Layered Media Using the BEM. *Journal of Applied Sciences* **6**(8): 1703-1711 (2006).
- [37] M. Schanz, T.Rüberg. Non-conforming coupled time-domain boundary element analysis, in *III European Conference on Computational Mechanics*, C.A. Mota Soares et al. Eds, Lisbon, Portugal (2006).

- [38] A.P.S. Selvadurai. *Partial differential equations in Mechanics*. Vol. 1. Springer (2000).
- [39] J.F. Semblata, A.M. Duvalb, P. Danglac. Seismic site effects in a deep alluvial basin: numerical analysis by the boundary element method. *Computers and Geotechnics* **29**: 573 – 585 (2002).
- [40] I. H. Sloan. Boundary Element Methods. *Applied Mathematics Report*, AMR95/9 (1995).
- [41] J.L. Wegner, M.M. Yao, X. Zhang. Dynamic wave-soil-structure interaction analysis in the time domain. *Computer and Structures* **83**: 2206-2214 (2005).