

# DETERMINANTI

March 24, 2015

## 1 Introduzione

Il determinante di una matrice è definito solo quando la matrice è quadrata. È una funzione  $\det: M_n(K) \rightarrow K$ ,  $K$  un campo di scalari, definita per ogni valore di  $n \geq 1$ . Questa funzione serve a distinguere le matrici invertibili da quelle non invertibili (dette anche **matrici singolari**): precisamente  $\det A = 0$  se e solo se  $\text{rango } A < n$ ,  $\det A \neq 0$  se e solo se  $A$  è invertibile (il che equivale a dire che  $A$  ha rango minore di  $n$ , l'ordine della matrice). Ricordo che la matrice  $A$  ha rango  $n$  se e solo se la riduzione a scala di  $A$  è una matrice triangolare superiore con elementi diagonali tutti diversi da 0. Vediamo i casi  $n = 1, 2, 3$ .

$n = 1$ . In questo caso  $A = (a_{11})$  e  $\text{rango } A = 1$  se e solo se  $a_{11} \neq 0$ . Quindi possiamo definire

$$\det A = \det(a_{11}) = a_{11}.$$

$n = 2$ . Sia  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  Supponiamo  $a_{11} \neq 0$ . Riducendo a scala si ottiene

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{a}_{1,2} \left( -\frac{a_{21}}{a_{11}} \right)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - a_{12} \frac{a_{21}}{a_{11}} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{m}_2(a_{11})} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

Segue che (se  $a_{11} \neq 0$ )  $\text{rango } A = 2$  se e solo se  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ . Se  $a_{21} \neq 0$ , scambiando le due colonne e ripetendo l'argomento, si ritrova che  $A$  ha rango 2 se e solo se  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ . Se poi entrambi  $a_{11}$  e  $a_{21}$  sono uguali a 0, la matrice ha rango minore di 2 e  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ . Questo suggerisce di definire

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$n = 3$ . Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Supponiamo  $a_{11} \neq 0$  e cominciamo a ridurre a scala la matrice  $A$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{a}_{1,2} \left( -\frac{a_{21}}{a_{11}} \right), \mathbf{a}_{1,3} \left( -\frac{a_{31}}{a_{11}} \right)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - a_{12} \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{23} - a_{13} \frac{a_{21}}{a_{11}} \\ 0 & a_{32} - a_{12} \frac{a_{31}}{a_{11}} & a_{33} - a_{13} \frac{a_{31}}{a_{11}} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{m}_2(a_{11}), \mathbf{m}_3(a_{11})} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{pmatrix};$$

supponiamo  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  e sottraiamo alla terza riga la seconda moltiplicata per  $\frac{a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$ ; otteniamo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & 0 & (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \frac{a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{pmatrix};$$

moltiplicando la terza riga per  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  e semplificando si ottiene la matrice

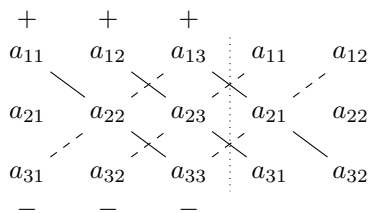
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & 0 & a_{11}(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) \end{pmatrix}$$

Poiché  $a_{11} \neq 0$ , e  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ , la matrice  $A$  ha rango 3 se e solo se  $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0$ . Questo suggerisce di definire

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Non considero le altre possibilità, sarebbe una discussione troppo lunga e inutile; il conto precedente serve solo a far vedere che la definizione della funzione  $\det$  non piove dal cielo.

Il seguente schema (chiamato regola di Sarrus) fornisce un ausilio per ricordare la definizione del determinante di ordine 3: si aggiungono la prima e la seconda colonna a destra della matrice e poi si tracciano le diagonali come nel diagramma seguente



I  $\pm$  sopra e sotto il diagramma ricordano il segno da assegnare ai monomi nella espansione del  $\det$ .

**Attenzione** Non sono conosciute regole mnemoniche per scrivere il determinante di matrici di ordine maggiore di 3.

Per definire il determinante di una matrice di ordine maggiore di 3 ci servono alcune premesse sulle permutazioni.

## 2 Permutazioni

Si considerino i primi  $n$  numeri naturali  $1, 2, \dots, n$ . Una  $n$ -pla ordinata formata con tutti gli  $n$  numeri  $1, 2, \dots, n$  (in ordine qualunque) si dice una **permutazione** di  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Le permutazioni di un insieme  $X$  contenente  $n$  oggetti distinti sono definite in modo simile. Una permutazione dell'insieme  $X$  può essere definita come una biiezione dell'insieme  $X$  su se stesso.

**Esempio** Le permutazioni di  $\{1, 2\}$  sono 2:  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ . Le permutazioni di  $\{1, 2, 3\}$  sono 6, precisamente

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$$

**Teorema** Il numero di permutazioni di un insieme con  $n$  oggetti distinti è  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n$ . dim. Si procede per induzione. Come abbiamo visto, per  $n = 1, 2, 3$  il risultato è vero. Supponiamo di avere dimostrato l'asserto fino ad  $n-1$ . Segue che ogni insieme con  $n-1$  oggetti ha  $(n-1)!$  permutazioni. Partendo da un insieme con  $n$  oggetti, per trovarne tutte le permutazioni scelgo uno degli oggetti e lo metto per primo. Quello che rimane forma un insieme con  $n-1$  oggetti. Segue che, aggiungendo al primo elemento scelto ognuna delle permutazioni dei rimanenti oggetti, trovo  $(n-1)!$  permutazioni che hanno l'elemento scelto come primo elemento. Poiché posso scegliere il primo elemento in  $n$  modi distinti, trovo in tutto  $n(n-1)! = n!$  permutazioni degli  $n$  oggetti.  $\square$

L'insieme delle permutazioni di  $\{1, 2, \dots, n\}$  si denota con  $S_n$ . Se  $\sigma = (j_1, j_2, \dots, j_n) \in S_n$  scriveremo brevemente  $\sigma = j_1 j_2 \dots j_n$ . Definiamo ora il **segno** o la **parità** di una permutazione. Una **inversione** in  $\sigma$  è una coppia di interi  $(i, k)$  con  $i > k$  ma  $i$  precede  $k$  in  $\sigma$ . Indicheremo con  $N(\sigma) = N(j_1 j_2 \dots j_n)$  il numero di inversioni in  $\sigma = j_1 j_2 \dots j_n$ . Diremo che  $\sigma$  è una permutazione **pari** se  $N(\sigma)$  è un numero pari, **dispari** se  $N(\sigma)$  è un numero dispari. Il segno o la parità di  $\sigma$ , denotato con  $\text{sgn } \sigma$ , è

$$\text{sgn } \sigma = (-1)^{N(\sigma)} = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ è dispari} \end{cases}$$

**Esempi 1.** Trovare il segno delle permutazioni  $\sigma = 13245$  e  $\sigma = 24531$ . Per ogni elemento  $k$  contiamo il numero degli elementi  $i > k$  con  $i$  che precede  $k$  in  $\sigma$ .

Nel primo caso: 1 è al primo posto e quindi nessun  $k > 1$  può precederlo; dei numeri maggiori di

2 solo 3 precede 2; per  $k = 3, 4, 5$ , nessun numero maggiore li precede. Dunque abbiamo una sola inversione e  $\text{sgn } \sigma = -1$ .

Nel secondo caso: 1 è preceduto da tutti gli altri numeri, quindi quattro inversioni; 2 non è preceduto da alcun numero maggiore di 2; 3 è preceduto da 4 e 5, altre due inversioni; 4 e 5 non sono preceduti da numeri maggiori; in tutto quindi abbiamo sei inversioni e la  $\sigma$  questa volta è pari.

2. La permutazione  $\varepsilon = 12 \dots n$  è pari perché non compaiono inversioni.

3. In  $S_2$  la permutazione 12 è pari, 21 è dispari. In  $S_3$  le permutazioni 123, 231, 312 sono pari e 132, 213, 321 sono dispari.

**Osservazioni** 1. Chiaramente se si scambiano tutte le coppie delle inversioni di una permutazione si ritrova l'ordine naturale. Si può dimostrare che, se una permutazione  $\sigma$  può essere riportata all'ordine naturale con un numero pari (dispari) di scambi, allora ogni altra sequenza di scambi che riporta  $\sigma$  all'ordine naturale deve avere anch'essa un numero pari (dispari) di scambi. Segue che

$$\text{sgn } \sigma = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma \text{ può essere riportata all'ordine naturale con un numero } \mathbf{pari} \text{ di scambi,} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ può essere riportata all'ordine naturale con un numero } \mathbf{dispari} \text{ di scambi.} \end{cases}$$

2. Si può dimostrare che in  $S_n$ , per ogni  $n > 1$ , il numero delle permutazioni pari è uguale al numero delle permutazioni dispari.

### 3 Definizione del determinante

Data la matrice  $A = (a_{ij})$ , quadrata di ordine  $n$ , consideriamo un prodotto di  $n$  elementi di  $A$  tale che uno ed uno solo elemento proviene da ciascuna riga ed uno ed uno solo elemento proviene da ciascuna colonna. Un tale prodotto si può scrivere

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

dove ordiniamo i fattori seguendo l'ordine naturale delle righe  $1, 2, \dots, n$ . Poiché i fattori provengono da colonne diverse, gli indici di colonna formano una permutazione  $\sigma = j_1 j_2 \dots j_n$  in  $S_n$ . Viceversa, ogni permutazione in  $S_n$  determina un prodotto di questa forma. Quindi con la matrice  $A$  si possono formare  $n!$  di questi prodotti.

Il **determinante** di  $A$ , denotato con  $\det A$  o anche  $|A|$ , è la somma di tutti questi prodotti  $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ , ciascuno moltiplicato per  $\text{sgn}(j_1 j_2 \dots j_n)$

$$\det A = |A| = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n \in S_n} \text{sgn}(j_1 j_2 \dots j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

Il determinante della matrice quadrata di ordine  $n$  generica si dice determinante di ordine  $n$  denotato anche con  $\det_n(a_{ij})$ . È un polinomio omogeneo di grado  $n$  nelle lettere  $a_{ij}$ .

Facciamo vedere che questa definizione coincide con quella data nei casi  $n = 1, 2, 3$ .

$n = 1$ . Sia  $A = (a_{11})$  una matrice di ordine 1. Poiché  $S_1$  contiene una sola permutazione e questa permutazione è pari,  $\det A = a_{11}$ .

$n = 2$ . Sia  $A = (a_{ij})$  una matrice  $2 \times 2$ ; segue dalla definizione  $\det A = \text{sgn}(12)a_{11}a_{22} + \text{sgn}(21)a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .

$n = 3$ . In questo caso

$$\det A = \text{sgn}(123)a_{11}a_{22}a_{33} + \text{sgn}(231)a_{12}a_{23}a_{31} + \text{sgn}(312)a_{13}a_{21}a_{32} + \text{sgn}(321)a_{13}a_{22}a_{31} +$$

$$\text{sgn}(213)a_{12}a_{21}a_{33} + \text{sgn}(132)a_{11}a_{23}a_{32} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Il numero degli addendi di un determinante di ordine  $n$  è  $n!$  e quindi diventa presto un numero enorme. Quindi non si può usare la definizione per calcolare un determinante di ordine grande. Ad esempio il determinante di ordine 10 contiene 3.628.800 termini. Ma vedremo che il determinante gode di alcune proprietà che ne semplificano il calcolo.

## 4 Proprietà fondamentali del determinante

**P1.** Il determinante di una matrice e della sua trasposta coincidono

$$\boxed{\det A = \det A^t}$$

Da questa proprietà segue che ogni teorema sul determinante di una matrice  $A$  che riguarda le righe di  $A$  avrà un analogo teorema che riguarda le colonne di  $A$ .

**P2.** Se la matrice  $A$  ha una riga (colonna) nulla, allora  $\det A = 0$ .

**P3.** Se la matrice ha due righe (colonne) uguali, allora  $\det A = 0$ .

**P4.** Se  $A = (a_{ij})$  è triangolare, superiore o inferiore, i.e. gli elementi di  $A$  sotto o sopra la diagonale sono tutti nulli, allora  $\det A = \text{prodotto degli elementi diagonali} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ . In particolare  $\det \mathbb{1}_n = 1$ .

Le prossime tre proprietà spiegano come cambia il determinante di una matrice applicando alla matrice un'operazione elementare sulle righe o sulle colonne.

**P5.** Se la matrice  $B$  è ottenuta dalla matrice  $A$  scambiando due righe (colonne), allora  $\det B = -\det A$ .

**P6.** Se la matrice  $B$  è ottenuta dalla matrice  $A$  moltiplicando una riga (colonna) per uno scalare  $k$ , allora  $\det B = k \det A$ .

Da questa proprietà segue subito che se  $A$  ha ordine  $n$  e  $k$  è uno scalare

$$\boxed{\det(kA) = k^n \det A}$$

**P7.** Se la matrice  $B$  è ottenuta dalla matrice  $A$  sommando il multiplo di una riga (colonna) ad un'altra riga (colonna), allora  $\det B = \det A$ .

**P8. Formula di Binet** Il determinante del prodotto di due matrici  $A$  e  $B$  (quadrato) è il prodotto dei loro determinanti:

$$\boxed{\det(AB) = (\det A)(\det B)}$$

**P9.** Denotiamo con  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  le righe della matrice  $A$ . Supponiamo che la  $i$ -ma riga di  $A$  sia la somma di due vettori riga,  $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i$ . Allora  $\det A = \det B + \det C$ , ove

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{b}_i \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{c}_i \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

Un risultato simile vale anche per le colonne.

**Osservazione** Se scriviamo  $\det A = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ , ove  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  sono le righe (colonne) di  $A$ , le proprietà P9 e P7 si possono scrivere

$$\begin{cases} \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{c}_i, \dots, \mathbf{a}_n) \\ \det(\mathbf{a}_1, \dots, k\mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) = k \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) \end{cases}$$

Vedremo tra qualche lezione che queste due proprietà caratterizzano le cosiddette **trasformazioni lineari**. Quindi il determinante, visto come una funzione dipendente dalle righe (colonne) di una matrice, è una trasformazione lineare in ciascuna delle entrate.

## 5 Matrici invertibili

**Teorema A** Una matrice quadrata  $A$  è invertibile se e solo se  $\det A \neq 0$ .

Questo risultato aggiunge un item alla lista delle caratterizzazioni delle matrici invertibili che già conosciamo.

**Teorema** Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ . Gli asserti seguenti sono equivalenti:

- (i) la matrice  $A$  è invertibile,
- (ii) il sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ha un'unica soluzione per ogni  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ,
- (iii) il sistema omogeneo  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  ha la sola soluzione nulla,
- (iv)  $\text{rango } A = n$ ,
- (v) la matrice  $A$  è equivalente per righe alla matrice  $\mathbb{1}_n$ ,
- (vi) la matrice  $A$  si può esprimere come prodotto di matrici elementari,
- (vii) il determinante di  $A$  è non nullo,  $\det A \neq 0$ .

## 6 Sviluppo di Laplace

Sia  $A = (a_{ij})$  una matrice quadrata  $n \times n$ . Denotiamo con  $M_{ij}$  la sottomatrice di  $A$  ottenuta sopprimendo la riga  $i$ -ma e la colonna  $j$ -ma; è una matrice quadrata di ordine  $n-1$ . Il determinante  $\det M_{ij}$  si dice il **minore complementare** di  $a_{ij}$  in  $A$ . Il **cofattore** di  $a_{ij}$  è per definizione il minore con segno

$$A_{ij} : \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

Fare attenzione che  $M_{ij}$  è una matrice mentre  $A_{ij}$  è un numero. I segni dei minori si calcolano partendo con  $+$  al posto 11 e poi alternando  $-$  e  $+$  come in una scacchiera con i quadrati bianchi e neri:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

**Esempio** Calcolare i minori  $\det M_{23}$ ,  $\det M_{31}$  e i corrispondenti cofattori  $A_{23}$ ,  $A_{31}$  della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Togliendo la seconda riga e la terza colonna alla matrice  $A$  si ottiene

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \det M_{23} = -6, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \det M_{23} = -(-6) = 6;$$

Togliendo la terza riga e la prima colonna alla matrice  $A$  si ottiene

$$M_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \det M_{31} = -3, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \det M_{31} = +(-3) = -3.$$

**Teorema B** Il determinante di una matrice quadrata  $A = (a_{ij})$  di ordine  $n$  è uguale alla somma dei prodotti ottenuti moltiplicando gli elementi di una qualunque fissata riga (colonna) per il corrispondente cofattore

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad \det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

Le formule precedenti si dicono rispettivamente lo **sviluppo di Laplace** del determinante di  $A$  seguendo la  $i$ -ma riga, risp. seguendo la  $j$ -ma colonna.

Ad esempio lo sviluppo del determinante di ordine 3 seguendo la prima riga è

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

**Esempio** Calcolare  $\det A$  con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Usando la regola di Sarrus (vedi Introduzione) si trova  $\det A = -8 + 2 + 30 - 12 + 5 - 8 = 9$ . Con lo sviluppo di Laplace seguendo la prima riga si trova

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -8 + 5 + 2(-4 + 1) + 3(10 - 4) = -3 - 6 + 18 = 9.$$

**Esempio** Se nella matrice vi sono zeri, conviene approfittarne. Calcolare  $\det A$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 8 & 2 \\ 7 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conviene sviluppare seguendo la prima riga o l'ultima colonna perché in entrambi i casi vi sono due zeri. Scegliamo l'ultima colonna

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 7 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 8 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2[-3(49-30) - (7-12)] - 4[-5(21+1) - 8(-18)] = -240.$$

## 7 Come si calcola un determinante

Usando operazioni elementari e lo sviluppo di Laplace si riduce il calcolo di un determinante di ordine  $n \geq 4$  al calcolo di un determinante di ordine  $n-1$ .

1. Si sceglie nella matrice un elemento  $a_{ij} = 1$  o, se manca,  $a_{ij} \neq 0$ ,
2. usando  $a_{ij}$  come pivot, con operazioni elementari sulle righe (colonne) si fanno uguali a 0 tutti gli altri elementi della colonna (riga) che contiene  $a_{ij}$ ,
3. sviluppare il determinante seguendo la colonna (riga) contenente  $a_{ij}$ .

**Esempio** Calcolare

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scegliamo  $a_{22} = 1$  come pivot. Applicando successivamente  $\mathbf{a}_{2,1}(-1)$ ,  $\mathbf{a}_{2,3}(-1)$  e  $\mathbf{a}_{2,4}(-3)$  si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 6 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Usando P7 e lo sviluppo di Laplace seguendo la seconda colonna, abbiamo

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 6 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 7 & -5 \end{pmatrix} = + \det \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 7 - 5 \cdot (-29) = 166$$

sviluppando il determinante di ordine 3 seguendo la prima riga (che ha uno zero).

**Esempio** Il determinante di Vandermonde:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Usiamo P7 e sottraiamo la prima colonna alla seconda e terza colonna ottenendo

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & (b-a) & (c-a) \\ a^2 & (b^2-a^2) & (c^2-a^2) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & (b-a) & (c-a) \\ a^2 & (b+a)(b-a) & (c+a)(c-a) \end{pmatrix}.$$

Utilizzando P6 possiamo estrarre i fattori  $(b-a)$  e  $(c-a)$  dalla seconda e terza colonna risp., otteniamo

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & (b+a) & (c+a) \end{pmatrix}.$$

Sottraendo alla terza colonna la seconda si trova

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & (b+a) & (c-b) \end{pmatrix}.$$

Applicando ora P4 si ottiene il risultato annunciato.

**Esempio** Un altro modo per calcolare il determinante di una matrice è di ridurre, con operazioni elementari sulle righe, a forma triangolare superiore la matrice e applicare P4.

Calcolare

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 8 & -4 \end{pmatrix} &\stackrel{\mathbf{m}_4(1/2)}{=} 2 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \stackrel{\mathbf{s}_{1,2}}{=} -2 \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\mathbf{a}_{1,2}(-2), \mathbf{a}_{1,3}(-3), \mathbf{a}_{1,4}(-1)}{-2} \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 10 & -10 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \stackrel{\mathbf{s}_{2,4}}{=} 2 \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 10 & -10 & -10 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\mathbf{m}_3(1/10)}{=} 20 \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\mathbf{a}_{2,3}(-1), \mathbf{a}_{2,4}(-3)}{=} 20 \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 16 \end{pmatrix} \stackrel{\mathbf{a}_{3,4}(-5)}{=} \\ &20 \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 80. \end{aligned}$$

Per confronto, calcolo lo stesso determinante con il metodo precedente. Scelgo l'elemento di posto 21 come pivot e, operando sulle colonne, si trova

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 8 & -4 \end{pmatrix} &\stackrel{\mathbf{a}_{1,2}^c(2), \mathbf{a}_{1,3}^c(-4), \mathbf{a}_{1,4}^c(-3)}{=} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & -10 & -10 \\ 2 & 2 & 0 & -10 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Laplace II riga}}{=} \\ &-\det \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 10 & -10 & -10 \\ 2 & 0 & -10 \end{pmatrix} \stackrel{2 \times P6}{=} -20 \det \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \stackrel{\mathbf{a}_{1,3}^c(5)}{=} -20 \det \begin{pmatrix} 3 & -5 & 16 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{Laplace III riga}}{=} -20 \det \begin{pmatrix} -5 & 16 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = -20(-20 + 16) = 80. \end{aligned}$$

## 8 Aggiunta di una matrice

Sia  $A = (a_{ij})$  una matrice quadrata di ordine  $n$  e sia  $A_{ij}$  il cofattore di  $a_{ij}$ . La **matrice aggiunta**  $\tilde{A}$  di  $A$  è la trasposta della matrice dei cofattori di  $A$ :

$$\tilde{A} = (A_{ij})^t.$$

**Esempio** Calcolare la matrice aggiunta della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18, & A_{12} &= - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2, & A_{13} &= + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4, \\ A_{21} &= - \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11, & A_{22} &= + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14, & A_{23} &= - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5, \\ A_{31} &= + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10, & A_{32} &= - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, & A_{33} &= + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8, \end{aligned}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

**Teorema C** Sia  $A$  una matrice quadrata. Allora

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)\mathbf{1}.$$

Segue che, se  $\det A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}.$$

**Esempio** Nell'esempio precedente, si trova

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -46 & 0 & 0 \\ 0 & -46 & 0 \\ 0 & 0 & -46 \end{pmatrix} = -46\mathbf{1}_3$$

Segue che

$$\det A = -46, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{23} & \frac{11}{46} & \frac{5}{23} \\ -\frac{1}{23} & -\frac{7}{23} & \frac{2}{23} \\ -\frac{2}{23} & -\frac{5}{46} & \frac{2}{23} \end{pmatrix}.$$

## 9 Regola di Cramer

Sia  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  un sistema lineare con  $A$  matrice quadrata  $n \times n$ ,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Chiamiamo  $B_k$  la matrice ottenuta da  $A$  sostituendo la  $k$ -ma colonna con la colonna  $\mathbf{b}$ .

**Teorema D** Nelle notazioni precedenti, supponiamo  $\det A \neq 0$ . La soluzione del sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  è data da

$$x_1 = \frac{\det B_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det B_2}{\det A}, \dots, \quad x_n = \frac{\det B_n}{\det A}.$$

**Esempio** Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

È

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 5,$$

$$\det B_1 = \det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 20, \quad \det B_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = -10, \quad \det B_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 15,$$

e quindi

$$x = \frac{\det B_1}{\det A} = 4, \quad y = \frac{\det B_2}{\det A} = -2, \quad z = \frac{\det B_3}{\det A} = 3.$$

## 10 Matrici a blocchi

**Teorema E** Sia  $M$  una matrice a blocchi triangolare superiore o inferiore

$$M = \left( \begin{array}{c|c|c|c} A_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & A_2 & \cdots & * \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & A_n \end{array} \right) \quad \text{o} \quad M = \left( \begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & A_2 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline * & * & \cdots & A_n \end{array} \right).$$

Allora  $\det M = \det A_1 \det A_2 \cdots \det A_n$ .



**Esempio** Calcolare il determinante della matrice a blocchi

$$A = \left( \begin{array}{cc|ccc} 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ -1 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 6 \end{array} \right), \quad \det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = 10 + 3 = 13, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -(-20 - 9) = 29$$

Il secondo det è calcolato prendendo l'elemento di posto 12 come pivot e poi sviluppando seguendo la prima colonna. Segue che  $\det A = 13 \cdot 29 = 377$ .

## 11 Contabilità e tempistica

Calcoliamo il numero  $d_n$  delle operazioni (moltiplicazioni/divisioni e addizioni/sottrazioni) che servono per calcolare un determinante di ordine  $n$ . Ad esempio  $d_2 = 3$  perché  $\det_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  e quindi per calcolarlo servono due moltiplicazioni ed una sottrazione. Usando la formula di Laplace  $\det_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$  troviamo una formula induttiva per  $d_n$

$$(1) \quad d_n = n(d_{n-1} + 1) + n - 1$$

perché per ciascun addendo servono  $d_{n-1} + 1$  operazioni ( $d_{n-1}$  operazioni per calcolare il cofattore ed una moltiplicazione per calcolare il prodotto dell'elemento per il cofattore) ed ulteriori  $n - 1$  addizioni per sommare gli  $n$  addendi. Troviamo ora una stima per  $d_n$  con  $n$  grande. Poniamo

$$d_n = c_n n!$$

Riscrivendo (1) si ricava

$$c_n n! = n(c_{n-1}(n-1)! + 1) + n - 1 = c_{n-1}n! + 2n - 1$$

e quindi

$$c_n = c_{n-1} + \frac{2}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}, \quad n \geq 3, \quad c_2 = \frac{3}{2}.$$

Segue

$$c_3 = c_2 + \frac{2}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{3!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!},$$

$$c_4 = c_3 + \frac{2}{3!} - \frac{1}{4!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{2}{3!} - \frac{1}{4!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$$

e, induttivamente,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n!}.$$

Segue che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

e quindi

$$d_n \sim en!$$

Ricordo che la scrittura  $a_n \sim b_n$  significa  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$  (si dice anche che le successioni  $(a_n)$  e  $(b_n)$  sono **asintotiche**).

Per trovare valori approssimati di  $n!$  (per  $n$  grande) si usa la **formula di Stirling**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$$

Ad esempio, per  $n = 100$  si trova  $e100! \approx 2,53 \times 10^{158}$ . Secondo Wikipedia, il computer più veloce (giugno 2013) è un supercomputer cinese in grado di eseguire circa 34 petaFLOPS =  $34 \times 10^{15}$

FLOPS (Floating Point Operations Per Second) <sup>1</sup>. Per calcolare un determinante di ordine 100 servirebbero quindi circa  $2,35 \times 10^{135}$  anni. I cosmologi stimano che l'età dell'Universo, a partire dal Big Bang, sia di circa  $13,82 \times 10^9$  anni. Non sappiamo quanto vivrà ancora l'Universo ma il calcolo diretto di un determinante di ordine grande non sembra (al momento) praticabile. Né lo è la formula di Cramer per un sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  quadrato di ordine  $n$  con  $n$  grande. Per trovare la soluzione con la regola di Cramer bisogna calcolare  $n + 1$  determinanti di ordine  $n$  e quindi una stima di  $e(n + 1)!$  operazioni (forse qualcosa si può risparmiare tenendo conto del fatto che  $n$  dei determinanti differiscono da  $\det A$  solo per una colonna). Per un sistema di ordine 100 una stima di  $2,56 \times 10^{160}$  operazioni.

Calcoliamo il numero di operazioni che servono per risolvere un sistema con l'eliminazione gaussiana. Sappiamo che l'eliminazione gaussiana richiede prima la riduzione a scala della matrice completa del sistema e poi la retro-sostituzione. Consideriamo un sistema quadrato  $n \times n$  con matrice generica (quindi non ci preoccupiamo dei casi speciali in cui qualche elemento per il quale dobbiamo dividere possa essere uguale a zero). Calcoliamo prima le operazioni che servono per ridurre a scala per righe e poi quelle che servono per la retro-sostituzione. Terremo distinte le moltiplicazioni/divisioni dalle addizioni/sottrazioni (queste ultime hanno un costo-computer trascurabile rispetto alle prime).

Partiamo dalla matrice  $n \times (n + 1)$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

Prendiamo  $a_{11}$  come pivot. Per mettere uno zero sotto il pivot, consideriamo il numero  $a_{21}/a_{11}$  (una divisione), poi moltiplichiamo la riga  $(a_{12} \ \cdots \ a_{1n} \ b_1)$  per  $a_{21}/a_{11}$  ( $n$  moltiplicazioni) e poi sottraiamo il risultato alla riga  $(a_{22} \ \cdots \ a_{2n} \ b_2)$  ( $n$  sottrazioni). Quindi con  $1 + n$  molt/div ed  $n$  add/sott. otteniamo la matrice

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

Ripetendo il procedimento sulle sottostanti righe, con  $(n - 1)(1 + n)$  molt/div e  $(n - 1)n$  add/sott otteniamo la matrice

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * & * \end{array} \right)$$

che ha tutti zeri sotto il pivot della prima colonna. Ripetiamo il calcolo sulla sottomatrice  $(n - 1) \times (n - 1)$  ottenuta sopprimendo la prima riga e la prima colonna dell'ultima matrice. Quindi con  $(n - 2)(1 + n - 1)$  molt/div e  $(n - 2)(n - 1)$  add/sott mettiamo gli zeri sotto il pivot di posto 22. Procedendo induttivamente si ricava una matrice triangolare superiore

$$\left( \begin{array}{cccc|c} p_1 & \cdots & * & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{n-1} & q_{n-1,n} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & p_n & c_n \end{array} \right)$$

con

$$(n - 1)(n + 1) + (n - 2)n + (n - 3)(n - 1) + \dots + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = \sum_{j=1}^{n-1} j(j + 2) = \sum_{j=1}^{n-1} j^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} j$$

<sup>1</sup>Un Floating Point Number = numero in virgola mobile con precisione  $t$ , in base  $b$  (2 per il computer, 10 per il calcolo a mano), ha la forma  $\pm 0.d_1 d_2 \cdots d_t \times b^e$ . Il numero  $e$  è un intero che si dice l'esponente. Gli interi  $d_i$ ,  $0 \leq d_i \leq b - 1$ , si dicono le cifre significative.

molt/div e

$$(n-1)n + (n-2)(n-1) + \dots + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = \sum_{j=1}^{n-1} j(j+1) = \sum_{j=1}^{n-1} j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} j$$

add/sott. Utilizzando le formule (che dimostrerò qui sotto)

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + 2 + \dots + m = \sum_{j=1}^m j = \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m^2}{2} + \frac{m}{2} \\ 1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \sum_{j=1}^m j^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = \frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6} \end{array} \right.$$

che danno rispettivamente la somma dei primi  $m$  numeri naturali e la somma dei primi  $m$  quadrati. Sostituendo  $m = n - 1$  e semplificando si trova che per la riduzione a scala servono

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n & \text{moltiplicazioni/divisioni} \\ \frac{1}{3}(n^3 - n) & \text{addizioni/sottrazioni} \end{array}$$

Adesso la retro-sostituzione. L'ultima equazione è  $p_n x_n = c_n$  e trovo la soluzione con una divisione e nessuna add/sott. La penultima equazione è  $p_{n-1} x_{n-1} + q_{n-1,n} x_n = c_{n-1}$  che richiede due molt/div e una sottrazione. Il passo successivo richiederà tre molt/div e due add/sott. Procedendo induttivamente la retro-sostituzione richiede

$$\begin{array}{ll} 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n^2 + n}{2} & \text{moltiplicazioni/divisione} \\ 0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n^2 - n}{2} & \text{addizioni/sottrazioni} \end{array}$$

Sommando, si trova che l'eliminazione gaussiana richiede

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n \sim \frac{1}{3}n^3 & \text{moltiplicazioni/divisione} \\ \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n \sim \frac{1}{3}n^3 & \text{addizioni/sottrazioni} \end{array}$$

Segue che per risolvere un sistema  $n \times n$  servono, per  $n$  grande, circa  $\frac{2}{3}n^3$  operazioni. Se  $n = 100$ , un modesto computer con capacità di 1 gigaFLOPS =  $10^9$  FLOPS trova la soluzione in meno di 1/1000 di secondo.

### Dimostrazione delle formule

1)  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

Basta osservare che

$$2(1+2+\dots+n) = (1+2+\dots+n) + (n+(n-1)+\dots+1) = (1+n) + (2+n-1) + \dots + (n+1) = n(n+1).$$

2)  $1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6}$ .

Osserviamo che  $\square_m := \sum_{j=1}^m j^2$  approssima (è una somma di Riemann della funzione  $y = x^2$ ) per

eccesso l'integrale  $\int_0^m x^2 dx = \frac{m^3}{3}$ . È la somma delle aree dei rettangoli che hanno per base i segmenti di estremi  $(j-1, 0)$  e  $(j, 0)$  e altezza  $j^2$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . L'integrale dà l'area sotto la parabola  $y = x^2$  tra i punti  $(0, 0)$  e  $(m, m^2)$ . Calcoliamo l'errore che è la somma delle aree dei triangolini curvilinei che stanno sopra la parabola

$$\square_m - \int_0^m x^2 dx = \sum_{j=1}^m \left( j^2 - \int_{j-1}^j x^2 dx \right) = \sum_{j=1}^m \left( j^2 - \frac{j^3 - (j-1)^3}{3} \right) = \sum_{j=1}^m \left( j - \frac{1}{3} \right) = \frac{m^2}{2} + \frac{m}{2} - \frac{m}{3}$$

da cui segue subito la formula.

## 12 Dimostrazioni

**P1.** Posto  $B = (b_{ij}) = A^t$ ,  $b_{ij} = a_{ji}$ , dalla definizione segue che

$$\det B = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n \in S_n} b_{1j_1} b_{2j_2} \dots b_{nj_n} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n \in S_n} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n}.$$

Poiché  $j_1 j_2 \dots j_n$  è una permutazione di  $12 \dots n$ , riordinando i fattori, possiamo scrivere

$$(2) \quad a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n} = a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$$

per opportuni valori  $k_1, k_2, \dots, k_n$ . Il numero di inversioni per passare da  $12 \dots n$  a  $j_1 j_2 \dots j_n$  è uguale al numero di inversioni per passare da  $j_1 j_2 \dots j_n$  a  $12 \dots n$ . Da (2) segue che questo numero coincide con il numero di inversioni per passare da  $12 \dots n$  a  $k_1 k_2 \dots k_n$ . Segue che  $\text{sgn}(j_1 j_2 \dots j_n) = \text{sgn}(k_1 k_2 \dots k_n)$ . Pertanto

$$\det(A^t) = \det B = \sum_{k_1 k_2 \dots k_n \in S_n} \text{sgn}(k_1 k_2 \dots k_n) a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n} = \det A.$$

**P2.** Ciascun addendo in  $\det A$  contiene un fattore preso da ciascuna riga e quindi anche dalla riga nulla. Segue che ciascun addendo di  $\det A$  è nullo e quindi  $\det A = 0$ .

**P5.** Ci serve il seguente

**Lemma** *Se due elementi qualunque di una permutazione vengono scambiati, allora la permutazione ottenuta cambia parità.*

dim. Facciamo vedere dapprima che scambiando due termini adiacenti in una permutazione si cambia la parità. Sia  $j_1 j_2 \dots j_k j_{k+1} \dots j_n$  una permutazione qualunque e supponiamo di scambiare  $j_k$  e  $j_{k+1}$ . Abbiamo due casi:

- se  $j_k > j_{k+1}$ , allora  $N(j_1 j_2 \dots j_k j_{k+1} j_k \dots j_n) = N(j_1 j_2 \dots j_k j_{k+1} \dots j_n) - 1$ ,
- se  $j_k < j_{k+1}$ , allora  $N(j_1 j_2 \dots j_k j_{k+1} j_k \dots j_n) = N(j_1 j_2 \dots j_k j_{k+1} \dots j_n) + 1$ ,

ed in entrambi i casi la parità cambia.

Supponiamo ora di scambiare gli elementi  $j_i$  e  $j_k$ ,  $k > i$ , nella permutazione  $j_1 j_2 \dots j_i \dots j_k \dots j_n$ . Possiamo ottenere questo scambio scambiando successivamente elementi adiacenti. Per portare  $j_k$  nella  $i$ -ma posizione servono  $k - i$  scambi di termini adiacenti e la permutazione che si ottiene è

$$j_1 j_2 \dots j_k j_i \dots j_{k-1} j_{k+1} \dots j_n.$$

Ora portiamo l'elemento  $j_i$  nella posizione  $k$ -ma. Un momento di riflessione fa capire che per far questo servono  $(k - i) - 1$  scambi di termini adiacenti. Quindi per scambiare  $j_i$  e  $j_k$  in tutto servono  $2(k - i) - 1$  scambi di termini adiacenti. Poiché ogni scambio di termini adiacenti cambia la parità, un numero dispari di scambi di termini adiacenti cambia la parità della permutazione originale.  $\square$  Sia  $B = (b_{ij})$  la matrice ottenuta da  $A = (a_{ij})$  scambiando la riga  $r$ -ma con la riga  $s$ -ma. Allora

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } i \neq r, s, \\ a_{sj} & \text{se } i = r, \\ a_{rj} & \text{se } i = s. \end{cases}$$

Segue

$$\det B = \sum \text{sgn}(j_1 j_2 \dots j_r \dots j_s \dots j_n) b_{1j_1} b_{2j_2} \dots b_{rj_r} \dots b_{sj_s} \dots b_{nj_n} = \sum \text{sgn}(j_1 j_2 \dots j_r \dots j_s \dots j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{sj_r} \dots a_{rj_s} \dots a_{nj_n};$$

scambiando  $j_r$  e  $j_s$ , per il Lemma appena visto,  $\text{sgn}(j_1 j_2 \dots j_r \dots j_s \dots j_n) = -\text{sgn}(j_1 j_2 \dots j_s \dots j_r \dots j_n)$  e quindi

$$\det B = - \sum \text{sgn}(j_1 j_2 \dots j_s \dots j_r \dots j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{rj_s} \dots a_{sj_r} \dots a_{nj_n}$$

dove abbiamo riordinato i fattori in modo che gli indici siano nell'ordine naturale crescente. La somma del termine a destra è proprio  $\det A$  e pertanto  $\det B = -\det A$ .

**P3.** Supponiamo che le righe  $r$ -ma ed  $s$ -ma della matrice  $A$  coincidano. Scambiando queste due righe la matrice  $B$  che si ottiene è uguale ad  $A$  e quindi  $\det B = \det A$ . D'altra parte, da P5 segue che  $\det B = -\det A$ . Segue che  $\det A = -\det A$  e quindi  $\det A = 0$ .

**P4.** Supponiamo che  $A = (a_{ij})$  sia triangolare inferiore; dunque tutti i termini sopra la diagonale sono nulli:  $a_{ij} = 0$  se  $i < j$ . Consideriamo un addendo del determinante di  $A$ :

$$a = \operatorname{sgn}(j_1 j_2 \dots j_n) a_{2j_2} a_{1j_1} \dots a_{nj_n}.$$

Supponiamo  $j_1 \neq 1$ . Allora  $1 < j_1$  e quindi  $a_{1j_1} = 0$  e quindi  $a = 0$ . Segue che ogni addendo con  $j_1 \neq 1$  è nullo.

Ora supponiamo  $j_1 = 1$  ma  $j_2 \neq 2$ . Segue che  $j_2 > 2$  e quindi  $a_{2j_2} = 0$  e  $a = 0$ . Segue che ogni addendo con  $j_1 \neq 1$  o  $j_2 \neq 2$  è nullo.

Procedendo in questo modo, troviamo che ogni addendo per il quale  $j_1 \neq 1$  o  $j_2 \neq 2$  o ... o  $j_n \neq n$  è nullo. Segue che  $\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} =$  prodotto degli elementi diagonali.

**P6.** Se la  $r$ -ma riga è moltiplicata per  $k$  ogni addendo in  $\det A$  è moltiplicato per  $k$  e quindi  $\det B = k \det A$ :  $B = (b_{ij})$ ,

$$b_{ij} = \begin{cases} k a_{rj}, & \text{se } i = r \\ a_{ij}, & \text{se } i \neq r \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \det B &= \sum \operatorname{sgn}(j_1 j_2 \dots j_n) b_{1j_1} b_{2j_2} \dots b_{nj_n} = \sum \operatorname{sgn}(j_1 j_2 \dots j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots (k a_{rj_r}) \dots a_{nj_n} = \\ &k \sum \operatorname{sgn}(j_1 j_2 \dots j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = k \det A. \end{aligned}$$

**P9.** Gli elementi di  $A$  sono

$$a_{kj} = \begin{cases} a_{kj} & \text{se } k \neq i \\ b_{ij} + c_{ij} & \text{se } k = i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \det A &= \sum \operatorname{sgn}(j_1 j_2 \dots j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = \\ &\sum \operatorname{sgn}(j_1 j_2 \dots j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{i-1j_{i-1}} (b_{ij} + c_{ij}) a_{i+1j_{i+1}} \dots a_{nj_n} = \\ &\sum \operatorname{sgn}(j_1 j_2 \dots j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{i-1j_{i-1}} b_{ij} a_{i+1j_{i+1}} \dots a_{nj_n} + \\ &\sum \operatorname{sgn}(j_1 j_2 \dots j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{i-1j_{i-1}} c_{ij} a_{i+1j_{i+1}} \dots a_{nj_n} = \det B + \det C. \end{aligned}$$

**P7.** Sia  $A = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n)^t$  e sia  $B$  la matrice ottenuta sommando alla riga  $i$ -ma la riga  $j$ -ma moltiplicata per  $k$ . Quindi

$$B = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_i + k \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_n)^t.$$

Usando P9 otteniamo

$$\det B = \det(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_i + k \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_n)^t = \det(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_n)^t + \det(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots k \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_n)^t.$$

Da P6 segue che

$$\det(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots k \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_n)^t = k \det(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_n)^t$$

e il secondo determinante ha la riga  $i$ -ma e la riga  $j$ -ma uguali ed è quindi uguale a 0. Segue che  $\det B = \det A$ .

**Teorema A** Sia  $B$  la forma canonica per righe della matrice  $A$ . Dalla sezione sulle matrici invertibili sappiamo che  $A$  è invertibile se e solo se  $B = \mathbb{1}$ . Poiché  $B$  si ottiene da  $A$  applicando una sequenza di operazioni elementari sulle righe, da P5-P6-P7 segue che  $\det A$  è un multiplo non nullo di  $\det B$ . Se  $A$  è invertibile, allora  $\det B = \det \mathbb{1} = 1$  e quindi  $\det A \neq 0$ .

Viceversa, se  $A$  non è invertibile, allora  $B$  ha una riga nulla e quindi, per P2,  $\det B = 0$  e dunque anche  $\det A = 0$ .  $\square$

**P8.** Utilizzeremo i seguenti due Lemmi.

**Lemma 1** Sia  $E$  una matrice elementare per righe. Allora, per ogni matrice  $A$ ,

$$\det(EA) = (\det E)(\det A).$$

dim. Se  $E_1 = \mathbf{s}_{i,j} \mathbb{1}$ , da P5 e P4 segue che  $\det E_1 = -\det \mathbb{1} = -1$ . Se  $E_2 = \mathbf{m}_i(k) \mathbb{1}$ , da P6 e P4 segue che  $\det E_2 = k$ . Se  $E_3 = \mathbf{a}_{i,j}(k) \mathbb{1}$ , da P7 e P4 segue che  $\det E_3 = \det \mathbb{1} = 1$ .

Sappiamo che  $\mathbf{s}_{i,j} A = E_1 A$ ; da P5 segue che  $\det(\mathbf{s}_{i,j} A) = -\det A$  e quindi  $\det(E_1 A) = -\det A$ ; d'altra parte  $(\det E_1)(\det A) = -\det A$ .

Sappiamo che  $\mathbf{m}_i(k) A = E_2 A$ ; da P6 segue che  $\det(\mathbf{m}_i(k) A) = k \det A$  e quindi  $\det(E_2 A) = k \det A$ ; d'altra parte  $(\det E_2)(\det A) = k \det A$ .

Sappiamo che  $\mathbf{a}_{i,j}(k)A = E_3A$ ; da P7 segue che  $\det(\mathbf{a}_{i,j}(k)A) = \det A$  e quindi  $\det(E_2A) = \det A$ ; d'altra parte  $(\det E_3)(\det A) = \det A$ .  $\square$

**Lemma 2** Siano  $A$  e  $B$  matrici quadrate di ordine  $n$ . Se la matrice  $AB$  è invertibile, allora  $A$  e  $B$  sono matrici invertibili.

dim. Poniamo  $C = B(AB)^{-1}$  e  $D = AB$ . Segue che

$$AC = A(B(AB^{-1})) = (AB)(AB)^{-1} = DD^{-1} = \mathbb{1}_n$$

Da quanto visto nella sezione sulle matrici invertibili segue che  $A$  è matrice invertibile. Similmente, se poniamo  $C = (AB)^{-1}A$ , allora

$$CB = ((AB)^{-1}A)B = (AB)^{-1}(AB) = D^{-1}D = \mathbb{1}_n$$

da cui segue, come prima, che anche  $B$  è invertibile.  $\square$

Dimostriamo ora P8. Se  $A$  non è invertibile, allora, per il Lemma 2,  $AB$  non è invertibile. Dal Teorema A segue che  $\det(AB) = 0 = (\det A)(\det B)$ . Se invece  $A$  è invertibile, sappiamo dalla sezione sulle matrici invertibili che  $A = E_k \cdots E_2E_1$  con le  $E_1, E_2, \dots, E_k$  matrici elementari. Segue, per induzione, dal Lemma 1 che  $\det(AB) = \det(E_k \cdots E_2E_1B) = (\det E_k) \cdots (\det E_2)(\det E_1)(\det B) = (\det A)(\det B)$ .  $\square$

**Teorema B** Poiché  $\det A = \det A^t$  è sufficiente dimostrare il Teorema per le righe. Ciascun addendo di  $\det A$  contiene un elemento della riga  $i$ -ma  $(a_{i1} a_{i2} \cdots a_{in})$ . di  $A$ . Quindi possiamo scrivere

$$\det A = a_{i1}\widehat{A}_{i1} + a_{i2}\widehat{A}_{i2} + \dots + a_{in}\widehat{A}_{in}$$

ove  $\widehat{A}_{ij}$  è il coefficiente di  $a_{ij}$  in  $\det A$  ed è una somma di termini dove non compaiono elementi della riga  $i$ -ma. Per dimostrare il Teorema basta far vedere che  $\widehat{A}_{ij} = A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$  ove  $M_{ij}$  è la sottomatrice di  $A$  ottenuta sopprimendo la  $i$ -ma riga e la  $j$ -ma colonna.

Consideriamo il caso  $i = j = n$ . La somma dei termini contenenti  $a_{nn}$  è

$$a_{nn}\widehat{A}_{nn} = a_{nn} \sum' \operatorname{sgn}(j_1j_2 \dots j_{n-1}n) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{n-1,j_{n-1}}$$

ove  $\sum'$  indica la sommatoria estesa a tutte le permutazioni  $j_1j_2 \dots j_n$  con  $j_n = n$ . Questa somma è equivalente alla somma su tutte le permutazioni di  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  e quindi  $\widehat{A}_{nn} = \det M_{nn} = (-1)^{n+n} \det M_{nn}$ .

Ora consideriamo  $i$  e  $j$  arbitrari. Scambiando la  $i$ -ma riga con ciascuna delle successive righe finché la  $i$ -ma riga diventa l'ultima riga e, similmente, scambiando la  $j$ -ma colonna con ciascuna delle colonne successive finché la  $j$ -ma colonna diventa l'ultima colonna, si ottiene una matrice  $B = (b_{nk})$  con  $b_{nn} = a_{ij}$ ; la sottomatrice ottenuta sopprimendo l'ultima riga e l'ultima colonna di  $B$  coincide con la sottomatrice  $M_{ij}$  perché la posizione relativa delle altre righe e colonne non viene alterata. Quindi  $b_{nn}\widehat{B}_{nn} = a_{ij} \det M_{ij}$  ove  $\widehat{B}_{nn}$  è il coefficiente di  $b_{nn}$  in  $\det B$ . La matrice  $B$  si ottiene da  $A$  effettuando  $n-i$  scambi di righe ed  $n-j$  scambi di colonne. Dunque, per P5,  $\det A = (-1)^{n-i+n-j} \det B = (-1)^{i+j} \det B$ . Segue che il coefficiente di  $a_{ij}$  in  $\det A$  coincide con il coefficiente di  $a_{ij} = b_{nn}$  in  $\det B$  moltiplicato per  $(-1)^{i+j}$  e pertanto  $\widehat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij} = A_{ij}$ .  $\square$

**Teorema C** Premettiamo il seguente

**Lemma (a)** Sia  $B$  la matrice ottenuta da  $A$  sostituendo la riga  $i$ -ma con la riga  $(b_{i1} b_{i2} \dots b_{in})$ . Allora

$$\det B = b_{i1}A_{i1} + b_{i2}A_{i2} + \dots + b_{in}A_{in}.$$

(b) Se  $i \neq j$ , allora

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \dots + a_{jn}A_{in} = 0, \quad \text{e} \quad a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \dots + a_{nj}A_{ni} = 0.$$

dim. Dal Teorema B segue che  $\det B = b_{i1}B_{i1} + b_{i2}B_{i2} + \dots + b_{in}B_{in}$  ove  $B_{ij}$  è il cofattore di  $b_{ij}$  in  $B$ . Poiché  $B_{ij}$  non dipende dalla riga  $i$ -ma,  $B_{ij} = A_{ij}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  da cui segue l'asserto (a). Sia  $A'$  la matrice ottenuta da  $A$  sostituendo la  $i$ -ma riga di  $A$  con la  $j$ -ma riga di  $A$ . Da P3 segue che  $\det A' = 0$  e dall'asserto (a) segue dunque la prima uguaglianza dell'asserto (b). La seconda segue dalla prima e da P1,  $\det A = \det A^t$ .  $\square$

dim. del Teorema C. Sia  $A = (a_{ij})$ ,  $A\tilde{A} = (b_{ij})$ . La  $i$ -ma riga di  $A$  è  $(a_{i1} a_{i2} \dots a_{in})$ . La  $j$ -ma colonna di  $\tilde{A}$  è la trasposta dei cofattori della  $j$ -ma riga di  $A$

$$(A_{j1} A_{j2} \dots A_{jn})^t$$

Da questo, dal Teorema B e dal Lemma segue che

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det A & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Segue che  $A\tilde{A} = (\det A)\mathbf{1}$ .  $\square$

**Teorema D** Consideriamo il sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  e supponiamo  $D: \stackrel{\text{def}}{=} \det A \neq 0$ . Dal Teorema C segue che  $A^{-1} = (1/D)\tilde{A}$ . Segue

$$(3) \quad \mathbf{x} = \mathbf{1}\mathbf{x} = (A^{-1}A)\mathbf{b} = A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b} = (1/D)\tilde{A}\mathbf{b}.$$

Si osservi che la  $i$ -ma riga di  $(1/D)\tilde{A}$  è  $(1/D)(A_{1i} A_{2i} \dots A_{ni})$ . Se  $\mathbf{b} = (b_1 b_2 \dots b_n)^t$ , da (3) e dal Lemma che precede la dim. del Teorema C segue

$$x_i = (1/D)(b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \dots + b_n A_{ni}) = (1/D) \det B_i = \frac{\det B_i}{\det A}. \quad \square$$

**Teorema E** Basta dim. il caso di  $n = 2$ , il caso generale segue subito per induzione. Dunque supponiamo

$$M = \left( \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$$

con  $A = (a_{ij})$  quadrata di ordine  $r$  e  $B = (b_{ij})$  quadrata di ordine  $s$ . La matrice  $M = (m_{ij})$  è quadrata di ordine  $n = r + s$ . Se  $i > r$  e  $j \leq r$ , allora  $m_{ij} = 0$ . Segue che in

$$\det M = \sum \text{sgn}(j_1 j_2 \dots j_n) m_{1j_1} m_{2j_2} \dots m_{nj_n}$$

vanno considerate solo le permutazioni  $j_1 j_2 \dots j_n$  per le quali  $j_{r+1} j_{r+2} \dots j_{r+s}$  è una permutazione di  $\{r+1, r+2, \dots, r+s\}$  e  $j_1 j_2 \dots j_r$  è una permutazione di  $\{1, 2, \dots, r\}$ . Poniamo  $j_h^{(1)} = j_h$ ,  $h = 1, 2, \dots, r$  e  $j_k^{(2)} = j_{r+k} - r$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$ . Segue che

$$\text{sgn}(j_1 j_2 \dots j_n) m_{1j_1} m_{2j_2} \dots m_{nj_n} =$$

$$[\text{sgn}(j_1^{(1)} j_2^{(1)} \dots j_r^{(1)}) a_{1j_1^{(1)}} a_{2j_2^{(1)}} \dots a_{rj_r^{(1)}}] [\text{sgn}(j_1^{(2)} j_2^{(2)} \dots j_s^{(2)}) b_{1j_1^{(2)}} b_{2j_2^{(2)}} \dots b_{sj_s^{(2)}}]$$

da cui segue che  $\det M = (\det A)(\det B)$ .  $\square$