ALGEBRA DELLE MATRICI

March 8, 2015

1 Definizioni e notazioni

Una **matrice** è una tabella rettangolare le cui entrate sono numeri organizzati in **righe** orizzontali e **colonne** verticali.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha 3 righe e 2 colonne. Si dice che A ha **taglia** 3×2. La matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ha taglia 3×3. Si dice una matrice **quadrata** perché ha le righe e le colonne della stessa dimensione.

Le entrate di una matrice si dicono anche gli **elementi** della matrice. Le matrici sono usualmente denotate con lettere maiuscole, $A, bB, \ldots$.

Per individuare la posizione di un elemento in una matrice si usano due indici che specificano, il primo in quale riga si trova l'elemento ed il secondo in quale colonna. Ad esempio l'elemento di posto 13 nella matrice A non esiste perché la matrice A ha solo due colonne, mentre nella matrice B è il numero 1. Si mette sempre per primo l'indice di riga. Una matrice di taglia $n \times p$ si rappresenta così

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{13} & \cdots & a_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

dove chiaramente a_{ij} denota l'elemento di posto ij, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$. Brevemente si scrive anche $(a_{ij}) = (a_{ij})_{n \times p}$. Gli elementi a_{11}, a_{22}, $a_{33}, \ldots$ si dicono **elementi diagonali**.

Denoteremo con $\mathrm{M}_{n\times p}$ l'insieme formato dalle matrici di taglia $n \times p$. Generalmente, in questo corso, gli elementi di una matrice saranno numeri reali. Ma più avanti, quando studieremo autovalori ed autovettori di una matrice, dovremo usare anche i cosiddetti numeri complessi che definiremo. Salvo quando dovremo calcolare gli autovalori di una matrice, non useremo veramente la struttura fine dei numeri reali. Ci basterà sapere che l'insieme dei numeri reali è un **campo**, ovvero un insieme in cui sono definite le quattro operazioni dell'aritmetica: addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione (ricordare che si può dividere solo per un numero diverso da zero!) e che queste operaioni soddisfano le regole usuali dell'aritmetica. Il campo dei numeri reali usualmente si denota con $\mathbb{R}$ e quello dei numeri complessi con $\mathbb{C}$). Vedremo che il campo $\mathbb{C}$ è una estensione del campo $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, e dovremo distinguere matrici ad elementi in $\mathbb{R}$ dalle matrici ad elementi in $\mathbb{C}$. Useremo quindi la notazione $\mathrm{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ per le matrici ad elementi reali e $\mathrm{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$ per quelle ad elementi complessi.

Una matrice di taglia $n \times n$ si dice **quadrata** di **ordine** n. Gli elementi diagonali a_{11}, a_{22}, $a_{33}, \ldots, a_{nn}$ ne formano la **diagonale principale**. L'insieme delle matrici quadrate di ordine n ad elementi nel campo K si denota con $\mathrm{M}_n(K)$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. L'insieme M_1 si identifica con $\mathbb{R}$.

Negli esempi visti sopra gli elementi sono numeri. Ma si possono formare matrici i cui elementi sono funzioni, come ad esempio in

$$A = A(x) = \begin{pmatrix} \log x & e^x & 1 \\ 2\sqrt{x} & x^2 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha elementi in $\mathbb{R}^{]0,+\infty[}$ (che denota l'insieme delle funzioni $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$). La si può anche vedere come una applicazione

$$A\colon]0,+\infty[\longrightarrow M_{2\times 3}(\mathbb{R}).$$

Ad esempio

$$A(1)=\begin{pmatrix} 0 & e & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Un altro esempio è la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

che, vedremo, rappresenta la rotazione anti oraria di angolo θ nel piano euclideo.

Le matrici di taglia $1\times n$ si dicono **matrici riga**, o anche n-righe, quelle di taglia $n\times 1$ **matrici colonna** o n-colonne. Si denotano con lettere in grassetto $\mathbf{a},\mathbf{b},\ldots,\mathbf{x},\mathbf{y},\ldots,\mathbf{u},\mathbf{v},\ldots$

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

Sarà chiaro dal contesto se si tratta di righe o colonne. Poiché vi è una sola riga (risp. una sola colonna) si elimina l'indice di riga (risp. di colonna). Le matrici riga e matrici colonna sono un altro modo di scrivere le n-uple ordinate $(a_1,\ldots,a_n)$. L'utilità di questa notazione si vedrà in seguito. Quindi $\mathrm{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$ e $\mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ si identificano con $\mathbb{R}^n$ che denota appunto l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali. Quando $n=2,3$, non si usano gli indici e si scrive $(a,b),(x,y),(u,v),\ldots$, $(a,b,c),(x,y,z),(u,v,w),\ldots$.

Osservazione Le matrici riga (risp. colonna) si dicono anche **vettori riga** (risp. **colonna**). Questa terminologia discende dal fatto che, per $n=2,3$, i vettori fisici o geometrici (le freccette), una volta fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, nel piano o nello spazio, sono rappresentati da coppie o terne di numeri reali, dette le **coordinate cartesiane** dei vettori. Torneremo sull'interpretazione geometrica dei vettori nell'ultima parte del corso. Comunque è sufficiente quello che si è imparato alle scuole superiori. Quando $n>3$ le n-uple ordinate sono chiamate vettori per analogia anche se non siamo in grado di rappresentarli come freccette, perché manca, a noi umani, l'intuizione di spazi di dimensione superiore a tre.

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le righe di A sono $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Possiamo scrivere, con

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}.$$

Le colonne di A sono

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e possiamo scrivere $A = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_4 \end{pmatrix}$.

Viceversa, se $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ sono p-righe, denoteremo con

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

la matrice $n \times p$ le cui righe sono $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Similmente se $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_p$ sono m-colonne, denoteremo con $\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{pmatrix}$ le cui colonne sono $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_p$.

Due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ sono **uguali**, $A = B$, se hanno la stessa taglia e se $a_{ij} = b_{ij}$ per ogni i, j. Ad esempio

$$\begin{pmatrix} 3x - 2y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

signifca

$$\begin{cases} 3x & - & 2y & = & 1 \\ x & + & y & = & 3 \end{cases}$$

Le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

non sono uguali, anche se hanno gli stessi elementi, perché hanno taglia diversa. Le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

non sono uguali perché, pur avendo la stessa taglia e gli stessi elementi, gli elementi sono disposti in ordine diverso.

2 Somma di matrici

Due matrici si possono sommare SOLO se hanno la stessa taglia. Date A, $B \in \mathrm{M}_{n\times p}$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ definiamo

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Esempi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+1 & 2-1 \\ 3+2 & -1+0 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^2 & x \\ 0 & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & 0 \\ x & 2x+2 \end{pmatrix}$$

Proprietà fondamentali

Siano A, B, $C \in \mathrm{M}_{n\times p}$ matrici della stessa taglia

1) Proprietà associativa:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

2) Proprietà commutativa

$$A + B = B + A$$

La **matrice nulla** $\mathbb{0} = \mathbb{0}_{n\times p}$ è la matrice che ha tutti gli elementi uguali a 0.

3) Elemento neutro

$$A + \mathbb{0} = A = \mathbb{0} + A$$

La matrice nulla è l'unica matrice C (di taglia $n \times p$) tale che $A + C = A = C + A$ per ogni A. Infatti, se C soddisfa la condizione, è $C = C + \mathbb{0} = \mathbb{0}$. La **matrice opposta** di $A = (a_{ij})$ è la matrice $-A = (-a_{ij})$.

4) La matrice opposta è l'unica matrice B tale che

$$A + B = \mathbb{0} = B + A$$

Infatti, $-A = -A + \mathbb{0} = -A + (A + B) = (-A + A) + B = \mathbb{0} + B = B$. La **sottrazione** delle matrici A e B è definita da $A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})$.

3 Moltiplicazione per uno scalare

I numeri, nel contesto della teoria delle matrici, sono anche chiamati **scalari**. Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times p}$ definiamo

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

Esempio

$$5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 2 \\ 5\cdot 3 & 0 \\ 5(-1) & 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 0 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Esercizio Calcolare $3A - \frac{1}{2}B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$$

Proprietà fondamentali

Per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ed ogni matrice A e B della stessa taglia

1) $\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B$ (proprietà distributiva degli scalari rispetto all'addizione di matrici)

2) $(\lambda+\mu)A = \lambda A+\mu A$ (proprietà distributiva dell'addizione di scalari rispetto all'addizione di matrici)

3) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ (proprietà associativa della moltiplicazione per scalari)

4) $1A = A$

Si verifica facilmente che $-A = (-1)A$ e che $0A = \mathbb{0}$ (esercizio).

Esercizi

1) Trovare la 4-colonna la cui j-ma componente è uguale a j.

2) Trovare la 5-riga la cui i-ma componente è uguale a i^2.

3) Trovare la matrice quadrata $A = (a_{ij})$ di ordine 2 con $a_{ij} = (-1)^{i+j}$.

4) Trovare la matrice quadrata $A = (a_{ij})$ di ordine 3 con $a_{ij} = i/j$.

5) Trovare la matrice $A = (a_{ij})$ di taglia 3×4 con

$$a_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{se } i > j, \\ 0 & \text{se } i = j, \\ i-j & \text{se } i < j, \end{cases}$$

4 Moltiplicazione di matrici

La moltiplicazione AB di due matrici, detta **moltiplicazione righe per colonne**, per essere definita richiede che il numero delle colonne di A sia uguale al numero delle righe di B: se A ha taglia $n \times p$, B deve avere taglia $p \times m$. Quindi, a differenza rispetto al caso della somma, dove A e B devono avere la stessa taglia, A e B possono avere taglia diversa. Ad **esempio** se A ha taglia 2×3 e B ha taglia 3×4, si può definire AB ma BA non è definita! Se A ha taglia $n \times p$ e B ha taglia $p \times m$, vedremo che AB ha taglia $n \times m$.

Primo caso. La moltiplicazione di una p-riga (taglia $1 \times p$) per una p-colonna (taglia $p \times 1$) produce un numero (una matrice 1×1), così definito

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_pb_p = \sum_{h=1}^{p} a_hb_h.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2(-3) + (-1)1 + 3 \cdot 2 + 1(-1) = -2.$$

Secondo caso. La moltiplicazione di una matrice $A = (a_{ij})$ di taaglia $n \times p$ per una p-colonna $\mathbf{x}$ produce una matrice $A\mathbf{x}$ di taglia $n \times 1$, quindi una n-colonna così definita: se $\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix}$ è la i-esima riga di A, $i = 1, \ldots, n$ e $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, la matrice $A\mathbf{x}$ è la colonna il cui i-esimo elemento è $\mathbf{a}_i\mathbf{x} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ip}x_p$

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Proposizione *Se* $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_p \end{pmatrix}$ *è una matrice* $n \times p$ *e* $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$, *allora*

$$A\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_p\mathbf{c}_p.$$

dim. Dobbiamo far vedere che le due colonne $A\mathbf{c}$ e $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_p\mathbf{c}_p$ sono uguali. Per questo bisogna far vedere che gli elementi di posto i di $A\mathbf{c}$ e $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_p\mathbf{c}_p$ coincidono,

$i = 1, 2, \ldots, n$. Calcoliamo l'elemento di posto i di $A\mathbf{c}$. Se $\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ è la j-esima colonna, $j = 1, 2, \ldots, p$, allora $A = (a_{ij})$ e l'i-esimo elemento di $A\mathbf{c}$ è $c_1 a_{i1} + c_2 a_{i2} + \ldots + c_p a_{ip}$. Ma l'elemento di posto i di $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_p\mathbf{a}_p = \sum_{j=1}^{p} c_j \mathbf{a}_j$. Segue che i due elementi sono uguali e quindi l'asserto. $\square$

Definizione importante

Se $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p$ sono n-vettori colonna (risp. riga) e $c_1, c_2, \ldots, c_p$ sono scalari il vettore

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_p\mathbf{x}_p$$

si dice una **combinazione lineare** dei vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p$. Quindi la proposizione ci dice che se A è matrice di taglia $n \times p$, per ogni p-colonna $\mathbf{c}$, il vettore $A\mathbf{c}$ è una combinazione lineare delle colonne di A. Questo fatto giocherà un ruolo importante nel seguito.

Caso generale. Sia $A = (a_{ij})$ di taglia $n \times p$, $B = (b_{ij})$ di taglia $p \times m$. La matrice $AB = (c_{ij})$ ha taglia $n \times m$ e c_{ij} è il prodotto della i-ma riga di A per la j-ma colonna di B:

$$\boxed{c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{h=1}^{p} a_{ih}b_{hj}}$$

Si ottiene un'applicazione

$$\mathrm{M}_{n\times p} \times \mathrm{M}_{p\times m} \longrightarrow \mathrm{M}_{n\times m} \qquad (A, B) \longmapsto AB$$

In particolare se A e B sono matrici quadrate di ordine n, AB è quadrata di ordine n.

Esecizio Calcolare

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}.$$

Esempi numerici

1) Verificare:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 13 & 3 & 2 & 3 \\ 13 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

il prodotto BA non è definito perché B ha taglia 2×4 ed A ha taglia 2×3.

2) Prendiamo ora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

A ha taglia 3×2 e B ha taglia 2×3. Quindi sono definite sia AB che BA ma la prima ha taglia 3×3 la seconda 2×2. Quindi $AB \neq BA$. Verifica:

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -3 & -2 & -1 \\ -9 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Prendiamo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{quindi} \quad AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

A e B sono matrici quadrate e quindi sono definite sia AB e BA, ma $AB \neq BA$.

4) Prendiamo invece

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{quindi} \quad AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

in questo caso $AB = BA$.

Da questi esempi segue che

$$\boxed{\text{la moltiplicazione di matrici non è commutativa}}$$

Ciò non toglie che in casi particolari due matrici possano commutare, come visto nell'ultimo esempio.

Proprietà fondamentali

1) Proprietà associativa: A di taglia $n \times p$, B di taglia $p \times q$, C di taglia $q \times m$

$$A(BC) = (AB)C$$

2) Proprietà distributiva sinistra: A di taglia $n \times p$, B di taglia $p \times m$, C di taglia $p \times m$

$$A(B + C) = AB + BC$$

3) Proprietà distributiva destra: A di taglia $n \times p$, B di taglia $n \times p$, C di taglia $p \times m$

$$(A + B)C = AC + BC$$

Verifico la 3), le altre le lascio al lettore come utile esercizio sull'uso delle sommatorie e per imparare a fare un calcolo astratto, una dimostrazione.
Scriviamo $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$. Allora l'elemento di indice ij in $(A + B)C$ è

$$\sum_{h=1}^{p}(a_{ip} + b_{ip})c_{pj} = \sum_{h=1}^{p}(a_{ip}c_{pj} + b_{ip}c_{pj}) = \sum_{h=1}^{p} a_{ip}c_{pj} + \sum_{h=1}^{p} b_{ip}c_{pj}.$$

Ora, l'addendo $\sum_{h=1}^{p} a_{ip}c_{pj}$ è l'elemento di posto ij nella matrice AC e $\sum_{h=1}^{p} b_{ip}c_{pj}$ è l'elemento di posto ij nella matrice BC. Segue che il termine a destra nella precedente equazione è proprio l'elemento di posto ij nella matrice $AC + BC$.

Osservazione La proprietà associativa della moltiplicazione per matrici permette, come per i numeri, di non usare le parentesi quando si moltiplicano più di due matrici.Possiamo quindi scrivere $ABC = (AB)C = A(BC)$,

$$ABCD = ((AB)C)D = (A(BC))D = (AB)(CD) = A((BC)D) = A(B(CD)), \dots$$

Esempi

1) Verificare:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{0}, \quad BA = \begin{pmatrix} -12 & -36 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \neq \mathbb{0}$$

Qui la cosa interessante da sottolineare è che il prodotto di due matrici può essere nullo anche se le due matrici non sono nulle. Questo è un fenomeno (come la non commutatività) che distingue l'algebra delle matrici dall'algebra dei numeri: sappiamo infatti che per $a, b \in \mathbf{R}$, $ab = 0$ se e solo se $a = 0$ o $b = 0$.

2) Verificare

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad CB = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Anche qui succede una cosa diversa da quello che succede con i numeri: se $a, b, c \in K$, $c \neq 0$, da $ac = bc$ segue che $a = b$ perché si può semplificare moltiplicando ambo i membri per c^{-1}. Qui invece abbiamo $C \neq \mathbb{0}$ e $A \neq B$. Più avanti nel corso spiegheremo che questo fenomeno (come anche quello dell'esercizio precedente) dipende dal fatto che esistono matrici che, pur essendo non nulle, non hanno una inversa.

La **matrice identica** di ordine n è la matrice $\mathbb{1}_n$, quadrata di ordine n, che ha tutti gli elementi diagonali uguali ad 1 e tutti gli elementi non diagonali uguali a 0

$$\mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se l'ordine della matrice è chiaro dal contesto, scriveremo semplicemente $\mathbb{1}$ al posto di $\mathbb{1}_n$.

Esercizio Far vedere che se A ha taglia $n \times p$, allora $A\mathbb{1}_p = A = \mathbb{1}_n A$.

Una matrice quadrata A di ordine n si dice **invertibile** se esiste una matrice quadrata B di ordine n tale che $AB = BA = \mathbb{1}_n$. Più avanti nel corso faremo vedere che se A è invertibile, la matrice B è unica e si dirà l'**inversa** di A; porremo $B = A^{-1}$. Impareremo anche a riconoscere le matrici invertibili da quelle non invertibili.

Se $A \in \mathrm{M}_n$ e $p \geq 0$ è un intero, definiamo $A^0 = \mathbb{1}_n$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$ e se $p > 0$ è un intero,

$$A^p = \underbrace{A \cdots A}_{n \text{ volte}}$$

Esercizi

1) Calcolare $(A - \mathbb{1})(A + 2\mathbb{1})$, ove $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Dimostare che, se $A \in \mathrm{M}_n$, $(A - \mathbb{1})^2 = A^2 - 2A + \mathbb{1}$.

3) Siano A e B matrici per le quali AB è definito. Dimostrare che se A ha una riga nulla (una riga i cui elementi sono tutti uguali a 0), allora anche AB ha una riga nulla. È vero o falso che se B ha una riga nulla anche AB ha una riga nulla? (se la risposta è: vero, bisogna dimostrare l'asserto; se la risposta è: falso, basta far vedere un controesempio, ovvero che esistono due matrici A e B per le quali AB esiste, B ha una riga nulla ma AB non ha una riga nulla).

4) Enunciare e dimostrare un asserto analogo a quello del precedente esercizio con le colonne al posto delle righe.

5 Matrici diagonali

Una **matrice diagonale** è una matrice quadrata che ha tutti gli elementi non diagonali uguali a 0:

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

ad esempio

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Le matrici quadrate nulle e le matrici identiche sono esempi di matrici diagonali. Sia la somma che il prodotto di matrici diagonali (dello stesso ordine) sono matrici diagonali come diagonale è il prodotto di uno scalare per una matrice diagonale.

Esercizi

1) È vero o falso che se A, B sono matrici diagonali (dello stesso ordine) allora $AB = BA$?

2) È vero o falso che se A è una matrice diagonale di ordine 2 e B è una matrice qualunque di ordine 2, allora $AB = BA$?

3) Dimostrare che se A è una matrice di ordine 2 e $AD = DA$ per ogni matrice diagonale D di ordine 2 allora A è matrice diagonale.

4) È possibile generalizzare l'asserto del precedente esercizio a matrici di ordine $n > 2$?

6 Trasposta di una matrice

Se $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ è una n-riga, la sua **trasposta** A^t è la n-colonna

$$A^t = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

In generale se A è una matrice di taglia $n \times p$, la sua **trasposta** A^t è la matrice la cui i-ma colonna è la trsposta della i-ma riga di A. Se $A = (a_{ij})$ allora l'elemento di posto ij di A^t è a_{ji} . La trasposta A^t ha taglia $p \times n$.

Esempio La trasposta di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio Far vedere che la riga i-ma di A^t è la trasposta della colonna i-ma di A.

Esercizio Far vedere che la trasposta della colonna $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}^t$ è la riga

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Proprietà

1) $A^{tt} = (A^t)^t = A$

2) $(A + B)^t = A^t + B^t$

3) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

4) $(AB)^t = B^t A^t$

Se A ha taglia $n \times p$ e B ha taglia $p \times m$, allora B^t ha taglia $m \times p$ e A^t ha taglia $p \times n$ e pertanto il prodotto $B^t A^t$ è definito.

Esercizio Verificare la quarta proprietà per le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dimostro la 4), le altre le lascio al lettore. Poniamo $A = (a_{ij})$, taglia $n \times p$, $B = (b_{ij})$, taglia $p \times m$. L'elemento di posto ij della matrice $(AB)^t$ è l'elemento di posto ji della matrice AB e dunque è il prodotto della riga j-ma di A e della colonna i-ma di B

$$\begin{pmatrix} a_{j1} & \cdots & a_{jp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{pi} \end{pmatrix} = \sum_{h=1}^{p} a_{jh} b_{hi}$$

Calcoliamo ora l'elemento di posto ij della matrice $B^t A^t$. Devo calcolare il prodotto della riga i-ma di B^t per la colonna j-ma di A^t. La riga i-ma di B^t è la trasposta della colonna i-ma di B e la colonna j-ma di A^t è la trasposta della riga j-ma di A. Quindi l'elemento di posto ij della matrice $B^t A^t$ è

$$\begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{pi} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} a_{j1} & \cdots & a_{jp} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} b_{1i} & \cdots & b_{pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j1} \\ \vdots \\ a_{jp} \end{pmatrix} = \sum_{h=1}^{p} b_{hi} a_{jh}$$

Poiché il prodotto di numeri è commutativo è

$$\sum_{h=1}^{p} a_{jh} b_{hi} = \sum_{h=1}^{p} b_{hi} a_{jh}$$

e quindi le due matrici $(AB)^t$ e $B^t A^t$ sono uguali. CVD

7 Matrici simmetriche e antisimmetriche

Una matrice A si dice **simmetrica** se $A = A^t$, **antisimmetrica** se $A^t = -A$. Se a_{ij} è l'elemnto di posto ij di A, A è simmetrica se e solo se $a_{ji} = a_{ij}$, antisimmetrica se e solo se $a_{ji} = -a_{ij}$. In particolare, nel secondo caso, $a_{ii} = -a_{ii}$. Quindi in una matrice antisimmetrica gli elementi diagonali sono tutti uguali a 0. Se A è simmetrica o antisimmetrica deve essere necessariamente una matrice quadrata (se A ha taglia $n \times p$, allora A^t ha taglia $p \times n$ e se $A^t = \pm A$ deve essere $n = p$). Ecco esempi di una matrice simmetrica e una antisimmetrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Denotiamo con $\mathrm{Simm}_n(K)$ e con $\mathrm{Asimm}_n(K)$ rispettivamente l'insieme delle matrici simmetriche e quello delle matrici antisimmetriche di ordine n ad elementi nel campo K.
Se A, B sono simmetriche e λ è uno scalare

$$(A+B)^t = A^t + B^t = A + B, \qquad (\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A.$$

Nel caso antisimmetrico:

$$(A+B)^t = A^t + B^t = -A - B = -(A+B), \qquad (\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda(-A) = -(\lambda A).$$

Esercizi 1) È vero o falso che se A, B sono matrici simmetriche (risp. antisimmetriche) anche AB è una matrice simmetrica (risp. antisimmetrica)?

2) È vero o falso che se A è una matrice quadrata allora AA^t e A^tA sono matrici simmetriche?

3) Far vedere che se A è una matrice quadrata allora $\frac{1}{2}(A + A^t)$ è una matrice simmetrica e che $\frac{1}{2}(A - A^t)$ è una matrice antisimmetrica.