

Introduzione ai frattali

Francesco Fassò ed Andrea Giacobbe

lezione del 6 Maggio 2010

1 Insieme di Cantor: costruzione

L'insieme di Cantor è un sottoinsieme dell'intervallo $[0, 1]$. si ottiene con un passaggio al limite nel seguente modo: sia C_1 l'insieme ottenuto asportando dall'intervallo $[0, 1]$ l'intervallo aperto $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$.



Sia quindi C_2 il sottoinsieme di C_1 ottenuto asportando da C_1 i due intervalli aperti $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$ e $]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$.



Sia poi C_3 il sottoinsieme di C_2 ottenuto asportando da C_2 i quattro intervalli aperti $]\frac{1}{27}, \frac{2}{27}[$, $]\frac{7}{27}, \frac{8}{27}[$, $]\frac{19}{27}, \frac{20}{27}[$ e $]\frac{25}{27}, \frac{26}{27}[$.



L'intersezione $C = \cap C_i$ definisce un sottoinsieme di $[0, 1]$ noto come **insieme di Cantor**.

2 Caratterizzazione dell'insieme di Cantor

Cominciamo caratterizzando i punti di C . Un punto qualsiasi x dell'intervallo $[0, 1]$ si esprime in notazione ternaria come $x = 0.a_1a_2\dots$, dove $a_i \in \{0, 1, 2\}$ e dove l'espressione indica che $x = a_13^{-1} + a_23^{-2} + \dots$.

È ben noto che questa notazione presenta una ambiguità, infatti l'espressione periodica $0.a_1\dots a_n\bar{2}$ (dove $a_n \neq 2$) coincide con l'espressione finita $0.a_1\dots(a_n+1)$. Questo fatto si dimostra semplicemente isolando una successione geometrica e sostituendo ad essa il suo limite.

Decidiamo, per convenzione, che se un $x \in [0, 1]$ ha espansione ternaria finita del tipo $x = 0.a_1\dots a_n1$, allora dobbiamo riscriverlo come $x = 0.a_1\dots a_n0\bar{2}$.

Proposizione 1 *Un punto $x \in [0, 1]$ appartiene all'insieme di Cantor se e solo se nella sua espressione ternaria (scritta usando la convenzione precedente) non appaiono 1*

Dimostrazione. Basta osservare che i punti dell'intervallo aperto $] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} [$ sono precisamente tutti e soli i punti con espansione ternaria del tipo $0.1a_2\dots$, i punti dei due intervalli aperti $] \frac{1}{9}, \frac{2}{9} [$ e $] \frac{7}{9}, \frac{8}{9} [$ sono precisamente tutti e soli i punti con espansione ternaria del tipo $0.01a_3\dots$ e $0.21a_3\dots$, e così via. $\square$

3 Proprietà dell'insieme di Cantor

Cominciamo con il dimostrare alcune proprietà topologiche di C .

Proposizione 2 *L'insieme di Cantor è chiuso, ha interno vuoto, e ogni suo punto è punto di accumulazione.*

Dimostrazione.

È chiuso perché intersezione di chiusi. Ha interno vuoto perché per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un k abbastanza grande tale che $\varepsilon > 3^{-k}$. Ed è evidente che nessuna palla di raggio ε è interamente contenuta neppure in C_k , tanto meno potrà essere contenuta in C . Quindi non esistono aperti tutti contenuti in C .

Per mostrare l'ultimo fatto basta costruire, dato un $x \in C$, una successione $x_n \neq x$ ed in C tale che x_n converga ad x . Se l'espansione ternaria di $x = 0.a_1\dots$ allora definitamo $x_n = 0.a_1\dots a_{n-1}\tilde{a}_n a_{n+1}\dots$ dove $\tilde{a}_n = 0$ se $a_n = 2$ ed $\tilde{a}_n = 2$ se $a_n = 0$. È facile notare che gli elementi x_n hanno tutte le proprietà richieste. $\square$

Ricordiamo che un insieme in cui tutti i suoi punti sono di frontiera (ovvero sono di accumulazione per l'insieme e non sono interni all'insieme) sono detti **perfetti**. Una seconda proprietà di C interessante è che, nonostante non abbia punti interni ha comunque una certa "consistenza". Infatti

Proposizione 3 *La cardinalità di C è continua.*

Dimostrazione. Scriviamo una bijezione tra i punti di C ed in punti di $[0, 1]$. Ogni punto $x \in [0, 1]$ si scrive in espansione binaria nel modo $x = 0.b_1\dots$ con i $b_i = 0, 1$. Un punto dell'insieme di Cantor C si scrive invece come abbiamo visto in espansione ternaria.

La bijezione manda un punto di C $x = 0.a_1a_2\dots$ nel punto di $[0, 1]$ $y = 0.(3/2a_1)(3/2a_2)\dots$. In altre parole si prende una espansione ternaria, si sostituiscono i 2 con 1 e si pensa l'espressione come una espansione binaria. $\square$

Abbiamo quindi mostrato che, almeno numericamente, l'insieme di Cantor è consistente. D'altro canto

Proposizione 4 *La misura di Lebesgue di C è zero*

Dimostrazione. Usiamo il fatto che se A_i è una famiglia di insiemi disgiunti, allora $\lambda(\cup A_i) = \sum \lambda(A_i)$. Calcoliamo la misura del complementare di C . Questa è la somma di

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \dots + \frac{2^i}{3^{i+1}} + \dots = \frac{1}{3} \sum \left(\frac{2}{3}\right)^i = 1$$

$\square$

Queste sono proprietà interessanti, ma non sono le proprietà che caratterizzano i frattali. La proprietà di C che lo fa chiamare frattale richiede una definizione, che in questa trattazione è particolarmente “rigida” e che dovrebbe essere opportunamente indebolita.

Definizione 5 Diciamo che un sottoinsieme $\mathcal{F}$ di $\mathbb{R}^n$ è (a, k) -autosimilare se $\mathcal{F}$ è fatto di a copie di se stesso scalato di un fattore k . Ovvero se $\mathcal{F} = \varphi_1(\mathcal{F}') \cup \dots \cup \varphi_a(\mathcal{F}')$, dove $\mathcal{F}'$ è ottenuto da $\mathcal{F}$ per mezzo di una omotetia di fattore k , ovvero $\mathcal{F}' = \mathcal{F}/k$, e le a funzioni φ_i sono roto-traslazioni.

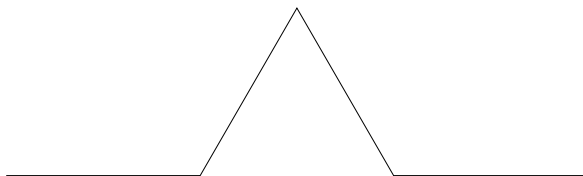
Questa è una proprietà caratteristica dei frattali, in un modo meno rigido essi sono i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che sono autosimilari, ovvero sono quegli insiemi che, anche zoomando in un particolare, continuano ad avere lo stesso aspetto.

Proposizione 6 L'insieme di Cantor è $(2, 3)$ -autosimilare

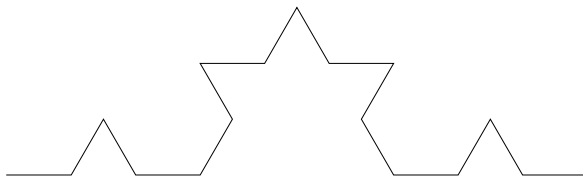
Dimostrazione. Graficamente la cosa è evidente. Per dimostrarlo analiticamente basta osservare che $C/3 = \{x = 0.0a_1\dots \mid a_i = 0, 2\}$ e quindi $C/3 + C/3 + 2/3 = C$. Quindi, usando $k = 3$ e le due traslazioni $\varphi_1 = \text{identità}$ e $\varphi_2 = \text{traslazione a destra di } 2/3$, si dimostra la tesi. $\square$

4 Curva di Koch: costruzione e proprietà

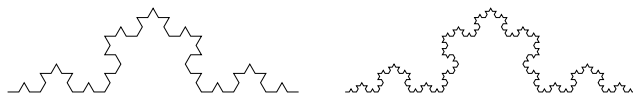
Anche in questo caso, la curva si costruisce con una iterazione. Sia γ_0 la curva il cui supporto è l'intervallo $[0, 1]$ in $\mathbb{R}^2$. Si cancelli, come per l'insieme di Cantor, il segmento aperto $]1/3, 2/3[$ e lo si sostituisca con 2 segmenti di lunghezza $1/3$ come in figura.



Si è così definita una curva γ_1 in $\mathbb{R}^2$. Per definire γ_2 si ripete l'operazione per ogni segmento che compone γ_1 . Ovvero, ogni segmento viene diviso in 3 parti, gli si toglie il terzo centrale e lo si sostituisce con due segmenti di uguale lunghezza ($1/9$) come in figura



Il processo prosegue definendo γ_3 , γ_4 e così via.



Non è difficile mostrare che la sequenza di funzioni γ_i converge uniformemente, e quindi il limite è una funzione γ_∞ che è mappa di $[0, 1]$ in $\mathbb{R}^2$ che è la curva di Koch K .

Proposizione 7 *La curva γ_∞ è continua.*

Dimostrazione. È un teorema di analisi che il limite uniforme di funzioni continue è continuo. $\square$

Proposizione 8 *La curva γ_∞ non è differenziabile in alcun punto.*

Non dimostreremo questo fatto, ma è evidente che i punti spigolosi di γ_∞ sono un insieme denso.

Proposizione 9 *La lunghezza di γ_∞ è infinita.*

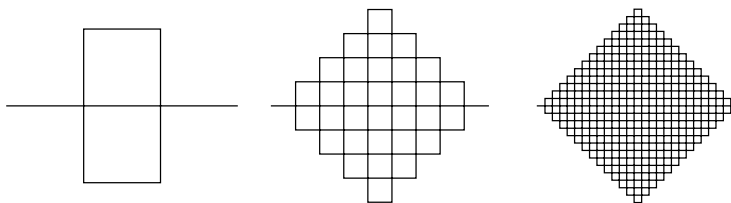
Dimostrazione. Calcoliamo il limite delle lunghezze delle curve γ_i . La lunghezza di γ_0 è 1, la lunghezza di γ_1 è $4/3$, la lunghezza di γ_2 è $(4/3)^2$, ed in generale la lunghezza di γ_i è $(4/3)^i$. Quindi la lunghezza diverge.

Proposizione 10 *L'insieme di Koch è $(4,3)$ -autosimilare.*

Dimostrazione. Graficamente la cosa è ovvia. $\square$

5 Curva di Peano: costruzione e proprietà

È una curva molto famosa, la sua costruzione è scritta in dettaglio in [PJS] e la costruiremo esplicitamente usando gli L-sistemi. Come per i casi precedenti, la costruzione si fa per iterazione. Si comincia con l'immersione γ_0 di $[0, 1]$ in $\mathbb{R}^2$, a tale curva si asporta il terzo centrale e lo si sostituisce con il “motivetto” in figura, percorso nel seguente modo, Est-Nord-Est-Sud-Ovest-Sud-Est-Nord-Est. Resta quindi definita la curva γ_1 , che è immersione di $[0, 1]$ in $\mathbb{R}^2$ il cui supporto è disegnato nella seconda figura. Si ripete l'operazione e si definisce così la curva γ_2 il cui supporto è disegnato nella terza figura. Il limite una curva γ_∞ che è mappa di $[0, 1]$ in $\mathbb{R}^2$ ed è nota con il nome di curva di Peano P .



Oltre ai fatti enunciati anche per la curva di Koch, ovvero che la curva di Peano non è differenziabile in alcun punto, e la sua lunghezza è infinita, la curva di Peano ha anche una proprietà notevole.

Proposizione 11 *La funzione γ_∞ è suriettiva nel quadrato ruotato disegnato nelle figure.*

La dimostrazione si trova il [PJS]. Ma grossomodo procede così: prendiamo un punto P del quadrato e giochiamo a battaglia navale: dividiamo il quadrato in 9 quadratini ottenuti tracciando 2 rette parallele ai lati SudEst-NordOvest e 2 rette parallele ai lati NordEst-SudOvest. Numeriamo i 9 quadratini così ottenuti nell'ordine in cui vengono visitati da γ_i .

Il punto P starà nel quadratino di indice i_1 . Si scelga allora il tempo t_1 che corrisponde al punto centrale del segmento di γ_1 che sta nel quadrato i_1 -esimo (che sarà $t_1 = (i_1 - 1)/3^2 + 1/2 * 3^2$). Si suddivida quindi il quadratino i_1 -esimo in ulteriori 9 quadratini, e li si etichetti come fatto sopra. Il punto P deve stare in uno di questi ulteriori 9 quadratini, starà in quello di indice i_2 . Si ripete quindi l'operazione scegliendo il tempo t_2 che corrisponde al punto centrale del segmento di γ_2 che sta nel quadrato i_2 -esimo (che sarà $t_2 = (i_1 - 1)/3^2 + (i_2 - 1)/3^3 + 1/(2 * 3^3)$).

Questo definisce un tempo limite t_∞ tale che $\gamma_\infty(t_\infty) = P$. $\square$

È ovvio inoltre che

Proposizione 12 *La curva di Peano è $(9,3)$ -autosimilare.*

6 Dimensione di similarità

Abbiamo per il momento definito curve che sono abbastanza inspessite. Nel senso che riescono addirittura a riempire regioni 2-dimensionali. Definiamo ora una dimensione per quantificare quanto inspessite queste curve siano. Questa definizione usa le proprietà di autosimilarità delle curve. La chiameremo **dimensione di similarità**.

Definizione 13 *Se un sottoinsieme $\mathcal{F}$ di $\mathbb{R}^n$ è (a,k) -autosimilare, la sua dimensione di similarità è il numero $d_{as}(\mathcal{F}) = \frac{\log(a)}{\log(k)}$.*

Abbiamo dato una definizione, controlliamo se è almeno sensata. L'intervallo $[0, 1]$ è ovviamente $(2, 2)$ -autosimilare, la sua dimensione di autosimilarità, in accordo con la definizione, sarà quindi $\log(2)/\log(2) = 1$. Il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ è $(4, 2)$ -autosimilare, la sua dimensione di autosimilarità è quindi $\log(4)/\log(2) = 2$. Il cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ è $(8, 2)$ -autosimilare, la sua dimensione di autosimilarità è quindi $\log(8)/\log(2) = 3$. Fino a qui pare che la definizione renda risultati ragionevoli.

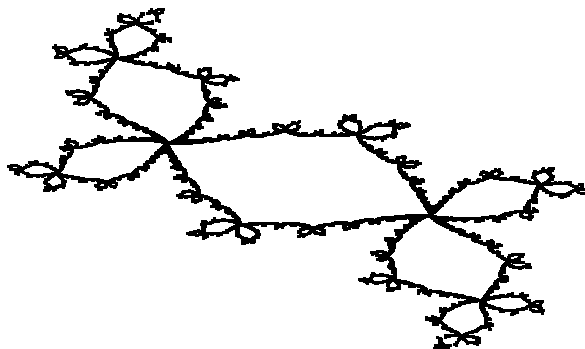
Applichiamo ora le definizioni ai tre insiemi che abbiamo definito. L'insieme di Cantor C è $(2, 3)$ -autosimilare, si ottiene quindi che $d_{as}(C) = \log(2)/\log(3) = 0.63093$, un numero minore di 1 ma maggiore di 0.

La curva di Koch K è $(4, 3)$ -autosimilare, si ottiene quindi che $d_{as}(K) = \log(4)/\log(3) = 1.26186$. La curva di Koch ha dimensione maggiore di 1, ma minore di 2: è più spessa di una curva, ma è pur sempre contenuta nel piano.

La curva di Peano P è $(9, 3)$ -autosimilare, si ottiene quindi che $d_{as} = \log(9)/\log(3) = 2$... come la dimensione del quadrato che P riempie suriettivamente.

7 Misura di Hausdorff

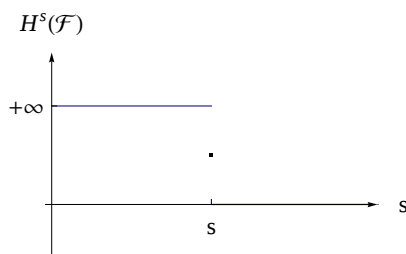
La definizione di dimensione autosimilare è possibile solo con insiemi autosimilari. Questo concetto diventa improponibile quando si ha a che fare con un frattale ottenuto in modo non-ricorsivo o quando il frattale è il risultato di un fenomeno naturale che ha una vaga autosimilarità (e.g. gli insiemi di Julia, i paesaggi frattali, i cavolfiori)



In matematica c'è una definizione di dimensione frattale universalmente accettata: la dimensione di Hausdorff. Dato $\mathcal{F}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, fissiamo un $\delta > 0$ e sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento di $\mathcal{F}$ fatto con palle di raggio al più δ . Sia infine $|\mathcal{U}|$ la cardinalità di $\mathcal{U}$. Definiamo la funzione $N(\delta, \mathcal{F}) = \inf_{\mathcal{U}} |\mathcal{U}|$ il minimo numero di aperti di raggio al più δ che servono a ricoprire $\mathcal{F}$.

Definizione 14 Dato $\mathcal{F}$ sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e scelto un reale positivo s , il numero reale non-negativo od eventualmente il simbolo ∞ definito come $H^s(\mathcal{F}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^s N(\delta, \mathcal{F})$ si dice misura di Hausdorff s -dimensionale di $\mathcal{F}$.

Non dimostreremo che —fissato $\mathcal{F}$ — la funzione $s \mapsto H^s(\mathcal{F})$ è una funzione decrescente, vale 0 per s grande, vale infinito per s piccolo, ed assume un valore positivo e finito solo per un particolare s . Quel particolare s è la dimensione di Hausdorff di $\mathcal{F}$.



Definizione 15 La dimensione di Hausdorff di un insieme $\mathcal{F}$ è l'unico reale positivo s per il quale la misura s -dimensionale di Hausdorff è finita e non nulla

Esempio 16 La dimensione di Hausdorff dell'insieme di Cantor è $\log(2)/\log(3)$.

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sull'osservazione che se $\delta = 1/3^k$ allora servono 2^k palle di raggio δ per coprire C . Segue allora che,

calcolando il limite che serve per definire $H^s(C)$ usando la successione dei $\delta = 1/3^k$ si ha che $H^s(C) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k \frac{1}{(3^s)^k}$. Facendo tendere δ a zero, ovvero k ad infinito, si ha che $H^s(C)$ è infinito se $2/3^s > 1$, è zero se $2/3^s < 1$ ed ha un valore finito non nullo solamente quando s è tale che $2/3^s = 1$.

Segue che la dimensione di Hausdorff di C è il numero s tale che $\log(2) - s \log(3) = 0$, ovvero il numero $s = \log(2)/\log(3)$. Risultato consistente con la definizione data di dimensione di autosimilarità. $\square$

La dimostrazione è solo indicativa, in realtà vale il seguente teorema.

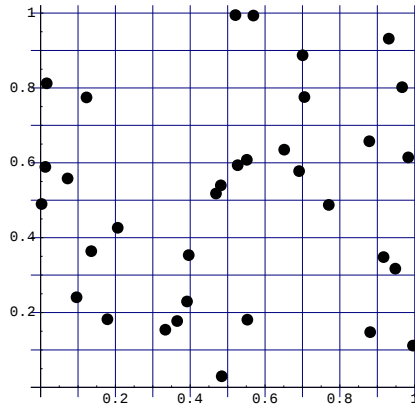
Teorema 17 *Se $\mathcal{F}$ è autosimilare, allora la dimensione di Hausdorff di $\mathcal{F}$ coincide con la sua dimensione di autosimilarità.*

8 Dimensione frattale box-counting

Una definizione di dimensione ‘frattale’ che si implementa facilmente al computer è la box-counting dimension. La si applica a casi più generali che quelli di autosimilarità perfetta, ma purtroppo, a volte dà risultati sbagliati.

L’idea della dimensione box-counting parte dall’osservazione che la definizione di dimensione di Hausdorff sarà l’ideale ma, dato un frattale $\mathcal{F}$, il calcolo di $N(\delta, \mathcal{F})$ è improponibile. Non possiamo certo usare tutti i ricoprimenti possibili. Si può però operare una drastica semplificazione: si definisce $K^s(\mathcal{F})$ allo stesso modo di $H^s(\mathcal{F})$ ma usando $M(\delta, \mathcal{F})$ invece di $N(\delta, \mathcal{F})$, dove $M(\delta, \mathcal{F})$ è il numero di quadrati della quadrettatura di lato δ dello spazio che contengono elementi di $\mathcal{F}$.

Espandiamo il concetto: invece di considerare il numero minimo di aperti di diametro δ che servono per ricoprire il frattale, si reticola lo spazio con una griglia di passo δ , e poi si conta quanti quadrati di questa griglia sono occupati da elementi del frattale $\mathcal{F}$



Questo definisce una funzione $M(\delta, \mathcal{F})$ che è certo maggiore od uguale ad $N(\delta, \mathcal{F})$. Ma potremmo essere fortunati e potrebbe succedere che, anche per questa funzione esista un particolare s tale che valga $\delta^s M(\delta, \mathcal{F})$ tende ad un valore v non zero nè infinito. Supponiamo che tale s esista. Allora

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^s M(\delta, \mathcal{F}) = v \neq 0,$$

da cui segue che

$$\log(v) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \log(\delta^s M(\delta, \mathcal{F})) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (s \log(\delta) + \log(M(\delta, \mathcal{F}))).$$

Quindi, dividendo per $-\log(\delta)$ che tende ad infinito per δ che tende a 0, si ha che

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(-s + \frac{\log(M(\delta, \mathcal{F}))}{-\log(\delta)} \right) = 0.$$

Ovvero

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(M(\delta, \mathcal{F}))}{-\log(\delta)} = s.$$

che è la pendenza asintotica del grafico della funzione $\delta \mapsto M(\delta, \mathcal{F})$ se disegnato in un diagramma log-log.

Vediamo come adattare questo fatto ad un calcolo numerico fatto al computer. Un modo naturale per discretizzare la famiglia di δ che tende a 0 è quello di porre $\delta = 1/n$. Scrivendo $M(n, \mathcal{F})$ invece che $M(1/n, \mathcal{F})$, l'equazione sopra diventa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(M(n, \mathcal{F}))}{\log(n)} = s$$

Definizione 18 *La dimensione box counting di un frattale $\mathcal{F}$ è il numero ottenuto calcolando il limite sopra. Dove $M(n, \mathcal{F})$ è la funzione che divide lo spazio in quadretti di lato $1/n$ e conta quanti quadretti sono occupati da punti del frattale.*

Parafrasando questa definizione, ci si ritrova a disegnare il grafico della curva nel piano parametrizzata da $n \rightarrow (\log(n), \log(M(n, \mathcal{F})))$ ed a calcolare la pendenza asintotica del grafico così ottenuto.

Un ultimo problema, di cui discuteremo in classe in futuro, viene dal fatto che i frattali che tratteremo sono oggetti numerici e non frattali matematici astratti, ovvero sono sottoinsiemi di una regione limitata di $\mathbb{R}^n$ dati come liste finite di punti.

Diventa quindi irragionevole pensare di far tendere n all'infinito. Infatti esiste un $N \gg 0$ tale che per ogni $n > N$ i quadratini di lato $1/n$ sono così piccoli da contenere ciascuno un punto di $\mathcal{F}$. In altre parole, per tutti gli $n > N$ la funzione $M(n, \mathcal{F})$ sarà definitivamente costante ed uguale a $|\mathcal{F}|$. Quindi il grafico di cui si deve calcolare la pendenza asintotica diventerà piatto. Invece che la pendenza asintotica si dovrà determinare la pendenza di una porzione “ragionevole” di grafico.

Riferimenti bibliografici

[PJS] Peitgen, Jurgens, Saupe, *Chaos and Fractals* (Springer).