Cognome - Nome - matricola:

....

Fisica Matematica Corso di L. Tr. in Matematica - 21 febbraio 2013
sottolineare: [**vecchio ordinamento 509**] [**nuovo ordinamento 270**]

Avvertenza: questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito. Consegnate un'*unica* versione, niente brutte copie.

Esercizio: Si consideri il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^3$

$$\dot{x} = 2\,y\,z, \qquad \dot{y} = -3\,x\,z, \qquad \dot{z} = x\,y.$$

a. Si calcolino gli equilibri del sistema, si linearizzi il sistema nei punti di equilibrio $P_1 = (0,0,1)$ e $P_2 = (0,1,0)$, e se ne discuta la stabilità usando il metodo spettrale di Lyapunov.
b. Si dimostri che le funzioni $F = x^2 + y^2 + z^2$ e $G = 2x^2 + 3y^2 + 5z^2$ sono integrali primi del sistema. Si usino gli integrali per descrivere qualitativamente le orbite (sono intersezioni di una sfera con una famiglia concentrica di ellissoidi triassiali. Potrebbe essere d'aiuto ricordare la lezione sulle equazioni di Eulero, nel capitolo sulla dinamica del corpo rigido).
c. Si riscriva il sistema usando il cambiamento di coordinate $u = x$, $v = y$, $w = x^2 + y^2 + z^2 = F$, la cui inversa

$$\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^2_{u,v} \times \mathbb{R}^+_w \,|\, u^2 + v^2 < w\} \to \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^+_z, \quad (u,v,w) \mapsto \left(u, v, \sqrt{w - u^2 - v^2}\right).$$

parametrizza, una volta fissato $w > 0$, la calotta nord della sfera di raggio w. Si restringa il campo vettoriale al piano u, v con $w = 1$ e si usi quindi l'integrale G, riscritto nelle coordinate u, v con $w = 1$, per disegnare il ritratto in fase del sistema ridotto.
d. Si riscriva il sistema nelle coordinate $u = x$ $v = z$, $w = x^2 + y^2 + z^2$, la cui inversa

$$\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^2_{u,v} \times \mathbb{R}^+_w \,|\, u^2 + v^2 < w\} \to \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^+_y \times \mathbb{R}_z, \quad (u,v,w) \to (u, \sqrt{w - u^2 - v^2}, v)$$

parametrizza, una volta fissato $w > 0$, una calotta sferica della sfera di raggio w. Si restringa il campo vettoriale al piano u, v con $w = 1$ e si usi quindi l'integrale G, riscritto nelle coordinate u, v con $w = 1$, per disegnare il ritratto in fase del sistema ridotto.

Teoria: Dare le definizione di varietà stabile ed instabile per un equilibrio iperbolico $\bar{z}$ di un campo vettoriale X. Dire che relazione intercorre tra queste varietà e gli autospazi della linearizzazione di X all'equilibrio $\bar{z}$.

2

Cognome - Nome - matricola:

....

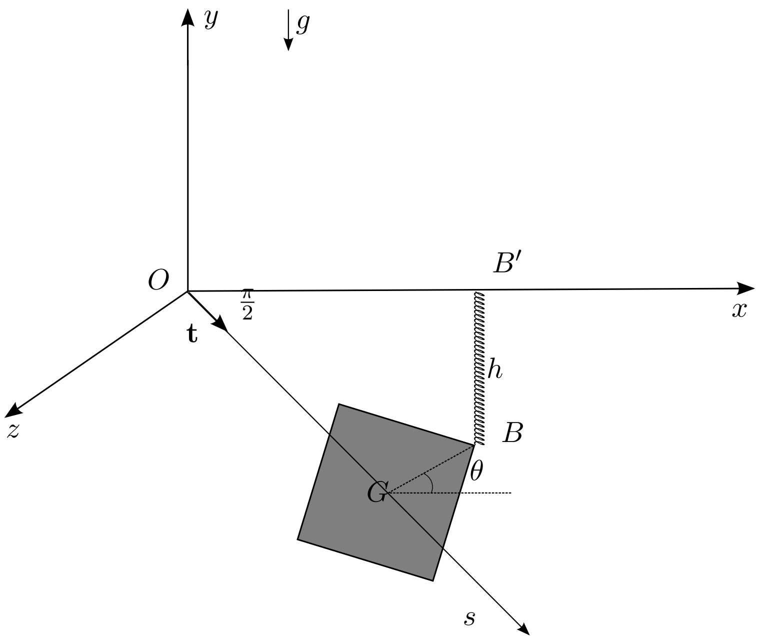
Fisica Matematica Corso di L. Tr. in Matematica - 21 febbraio 2013
sottolineare: [**vecchio ordinamento 509**] [**nuovo ordinamento 270**]

Avvertenza: questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito. Consegnate un'*unica* versione, niente brutte copie.

Esercizio: Nel riferimento inerziale ortonormale $Oxyz$ con l'asse y diretto verso l'alto $\mathbf{g} = (0, -g, 0)$, si consideri il sistema giacente nel piano Oxy costituito da una guida rettilinea liscia passante per l'origine individuata dal versore

$$\mathbf{t} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

e da una lamina quadrata omogenea di lato l e massa m il cui baricentro G è vincolato a scorrere lungo la guida. Si riferisca il sistema alle coordinate lagrangiane (s, ϑ) rispettivamente ascissa di G sulla guida orientata dal versore $\mathbf{t}$ e angolo formato dalla direzione positiva dell'asse x e il segmento GB (vedi figura) orientato positivamente in senso antiorario. Oltre alla gravità, sulla lamina agisce una forza elastica dovuta ad una molla tesa tra il vertice B della lamina e il punto B' di eguale ascissa posto sull'asse x; infine, sul baricentro G agisce una forza linearmente viscosa $\mathbf{F} = -k\mathbf{v_G}$, $k > 0$.



a. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità sulla base dei teoremi visti.
b. Determinare l'energia cinetica del sistema e le frequenze delle piccole oscillazioni nell'ipotesi che $\mathbf{F} = -k\mathbf{v_G} = 0$.

Teoria: Per quali sistemi vincolati la dinamica è governata dalle equazioni di Lagrange? Scrivere in dettaglio la deduzione delle equazioni di Lagrange.

3

a. Teorema di Noether, enunciato e dimostrazione.

b. Dimostrare o confutare che i diffeomorfismi di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, $(q,p) \mapsto ((\bar{q}(q,p), \bar{p}(q,p))$, che preservano il volume, pertanto con determinante Jacobiano uguale costantemente a 1, sono Trasformazioni Canoniche (di che valenza?).
È vero o falso che tutti i diffeomorfismi di $\mathbb{R}^{2n}$ in $\mathbb{R}^{2n}$ che preservano il volume, anche per $n > 1$, sono Trasformazioni Canoniche?

Svolgimento esercizio parte 1

a. gli equilibri sono gli assi coordinati. La Jacobiana del campo vettoriale è

$$\begin{pmatrix} 0 & 2z & 2y \\ -3z & 0 & -3x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi le linearizzazioni agli equilibri P_1 e P_2 rispettivamente sono di matrice

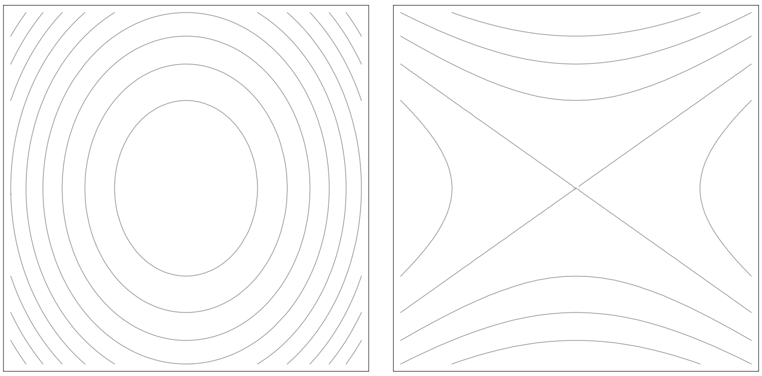
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I polinomi caratteristici sono per la prima matrice $x(x^2+6)$, che è un sistema degenere-centro con autovalori $0, \pm i\sqrt{6}$ ed è quindi indecidibile spettralmente e $x(x^2-2)$ per la seconda matrice, che è la matrice di un sistema degenere-sella con autovalori $0, \pm\sqrt{2}$ ed è quindi instabile.

b. Si dimostra con un semplice conto. Quindi si potrebbero disegnare le soluzioni intersecando le superfici di livello e si ottiene il disegno sulla sfera unitaria ben noto per le equazioni di Eulero.

c. Il campo vettoriale, nelle coordinate u, v, w diventa $\dot{u} = 2v\sqrt{w-u^2-v^2}$, $\dot{v} = -3u\sqrt{w-u^2-v^2}$, $\dot{w} = 0$. Vista la legge di conservazione, possiamo restringerci alle soluzioni con $w = 1$. L'integrale G nelle coordinate u, v con $w = 1$ diventa $-3u^2 - 2v^2 + 5$. Le sue curve di livello sono dei cerchi concentrici e si ha un centro (vedi figura di sinistra).

d. Il campo vettoriale, nelle coordinate u, v, w diventa $\dot{u} = 2v\sqrt{w-u^2-v^2}$, $\dot{v} = u\sqrt{w-u^2-v^2}$, $\dot{w} = 0$. Vista la legge di conservazione, possiamo restringerci alle soluzioni con $w = 1$. L'integrale G nelle coordinate u, v con $w = 1$ diventa $3 - u^2 + 2v^2$. Le sue curve di livello sono delle iperboli e si ha una sella (vedi figura di destra).



Svolgimento esercizio parte 2

$$U(s,\vartheta) = U_g + U_{el} = mgy_G + \frac{h}{2}y_B^2 = -mg\frac{\sqrt{2}}{2}s + \frac{h}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(l\sin\vartheta - s)\right)^2$$

La forza viscosa $F = -kv_G$ ha componenti lagrangiane

$$Q_s(s,\dot{s}) = -k\dot{s}, \qquad Q_\vartheta = 0.$$

e quindi non interviene nella determinazione degli equilibri. Le configurazioni di equilibrio sono i punti (s, ϑ) ove si annulla ∇U:

$$U_s = -mg\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{h}{2}(l\sin\vartheta - s) = 0, \qquad U_\vartheta = \frac{h}{2}(l\sin\vartheta - s)l\cos\vartheta = 0$$

ovvero

$$s = l\sin\vartheta + mg\frac{\sqrt{2}}{h}, \qquad \cos\vartheta = 0$$

le configurazioni di equilibrio sono quindi

$$P_1 = (\pi/2, s_1) = (\pi/2, l + mg\frac{\sqrt{2}}{h}), \qquad P_2 = (3\pi/2, s_2) = (3\pi/2, -l + mg\frac{\sqrt{2}}{h})$$

Calcoliamo la matrice hessiana

$$H_U((s,\vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} & -\frac{hl}{2}\cos\vartheta \\ -\frac{hl}{2}\cos\vartheta & \frac{hl^2}{2}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) + \frac{hl}{2}s\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

e valutiamola negli equilibri. Si trova

$$H_U(P_1) = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} & 0 \\ 0 & lmg\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \qquad H_U(P_2) = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} & 0 \\ 0 & -lmg\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Quindi P_1 è stabile per TLD mentre non possiamo applicare THND e quindi non possiamo dire nulla in P_2.

b) Energia cinetica. Usiamo il Teorema di Konig

$$T = \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}(\omega, I_G\omega) = \frac{m}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{12}(l^2 + l^2)\dot{\vartheta}^2$$

Le frequenze di piccola oscillazione in P_1 si trovano dall'equazione $\det H_U(P_1) - \omega^2 A(P_1) = 0$, ovvero

$$\det\begin{pmatrix} \frac{h}{2} - \omega^2 m & 0 \\ 0 & lmg\frac{\sqrt{2}}{2} - \omega^2\frac{ml^2}{6} \end{pmatrix} = 0$$

che ha soluzioni $\omega_1^2 = \dfrac{h}{2m}$ e $\omega_2^2 = \dfrac{3\sqrt{2}g}{l}$.