Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
I Compitino — 5 Aprile 2013
Durata: 2 ore e 30 minuti

Esercizio 1. Si consideri il campo vettoriale

$$X = \begin{pmatrix} (x+y-1)(3x+y+3) \\ (3y-x-1)(5x+y-1) \end{pmatrix}$$

a. Si determinino i 4 equilibri del sistema.
b. Si linearizzi il campo vettoriale ai 3 equilibri con norma minore od uguale ad 1.
c. Si dica, giustificandolo, di che tipo sono i 3 equilibri al punto **b** (centro, sella, fuoco, nodo, stabili od instabili). Non è necessario calcolare autovalori ed autovettori.
d. Si disegni il ritratto in fase del sistema linearizzato associato all'unico equilibrio con autovalori complessi.

Esercizio 2. Nel dominio $\Omega = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)_\xi \times \mathbb{R}_\eta$ è dato il campo vettoriale

$$X = \begin{pmatrix} \eta \cos^4 \xi \\ e^{\tan \xi}(\sin^2 \xi - \cos^2 \xi) \end{pmatrix}.$$

a. Si calcoli il campo vettoriale Y coniugato ad X dal cambiamento di coordinate

$$x = \tan \xi \qquad\qquad y = \eta$$

di inversa

$$\xi = \arctan x \qquad\qquad \eta = y.$$

b. Si giustifichi la seguente affermazione: *il ritratto in fase di Y è uguale a quello dell'equazione del II ordine* $\ddot{x} = e^x(x^2 - 1)$ (non si richiedono conti espliciti).
c. Si disegni il ritratto in fase dell'equazione del II ordine ottenuta al punto **b**.

Domanda 1. Enunciare il teorema spettrale di Lyapunov sulla stabilità.

Domanda 2. Enunciare la stima sulla separazione al più esponenziale delle orbite. Mostrare, attraverso 4 esempi, l'esistenza di campi vettoriali che posseggono soluzioni le quali divergono in modo esponenziale, convergono in modo esponenziale, non convergono nè divergono, hanno ritmo di divergenza non esponenziale (non serve supportare gli argomenti con conti espliciti).

Domanda 3. Quando si trattano equazioni differenziali del II ordine una classe di cambiamenti di coordinate speciali assume un ruolo importante. Di che tipo di cambiamenti di coordinate si tratta (come si chiamano e qual è la loro espressione come funzione delle x, v)? Che proprietà hanno?

- Scrivere nome e cognome su ogni foglio consegnato IN MODO LEGGIBILE.
- Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.
- Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro tutto ciò che non deve essere valutato.
- Indicare il numero di esercizio/domanda che si sta svolgendo e gli esercizi non svolti.

Soluzione all'esercizio 1

a. Gli equilibri si ottengono risolvendo $(x+y-1)(3x+y+3)=0$ e $(3y-x-1)(5x+y-1)=0$. Dalla prima equazione segue che $y=1-x$ oppure che $y=-3(x+1)$. Sostituendo la prima di queste due relazioni nell'equazione relativa alla seconda componente del campo vettoriale si ha che

$$(3(1-x)-x-1)(5x+(1-x)-1)=(3-3x-x-1)(5x+1-x-1)=(2-4x)(4x)=0$$

da cui si ricava che $x=0$ oppure $x=1/2$, e quindi $y=1$ oppure $y=1/2$. Sostituendo la seconda di queste due relazioni nell'equazione relativa alla seconda componente del campo vettoriale si ha che

$$(3(-3(x+1))-x-1)(5x-3(x+1)-1)=(-9x-9-x-1)(5x-3x-3-1)=(-10x-10)(2x-4)=0$$

da cui si ricava che $x=-1$ oppure $x=2$, e quindi $y=0$ oppure $y=-9$. In conclusione gli equilibri sono

$$P_1=(0,1),\quad P_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad P_3=(-1,0),\quad P_4=(2,-9).$$

b. La Jacobiana del campo vettoriale è

$$JX=\begin{pmatrix}(3x+y+3)+3(x+y-1) & (3x+y+3)+(x+y-1)\\ -(5x+y-1)+5(3y-x-1) & 3(5x+y-1)+(3y-x-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6x+4y & 4x+2y+2\\ -10x+14y-4 & 14x+6y-4\end{pmatrix}$$

Calcolata nei primi tre equilibri si ottengono sistemi lineari di matrici

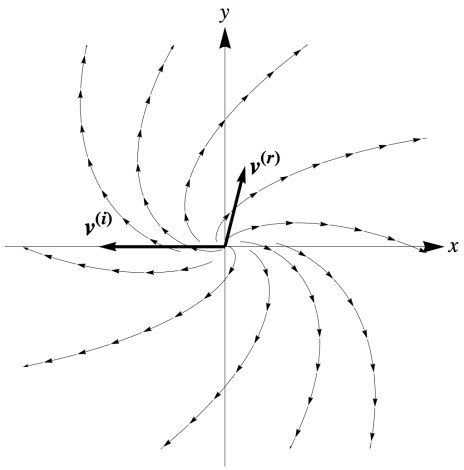
$$J_{P_1}X=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 10 & 2\end{pmatrix},\quad J_{P_2}X=\begin{pmatrix}5 & 5\\ -2 & 6\end{pmatrix},\quad J_{P_3}X=\begin{pmatrix}-6 & -2\\ 6 & -18\end{pmatrix}$$

c. Nel caso di P_1 la traccia è $\mathrm{tr}=6$ ed il determinante è $\det=-32$; quindi si tratta di una **sella** (due autovalori reali, uno positivo ed uno negativo).

Nel caso di P_2 la traccia è $\mathrm{tr}=11$ ed il determinante è $\det=40$; siccome $40=\det>(\mathrm{tr}/2)^2=30+1/4$ allora siamo nel caso di un **fuoco instabile** (due autovalori complessi coniugati con parte reale positiva).

Nel caso di P_3 la traccia è $\mathrm{tr}=-24$ ed il determinante è $\det=120$; siccome $120=\det<(\mathrm{tr}/2)^2=144$ allora si tratta di un **nodo stabile** (due autovalori reali entrambe negativi).

d. Il punto **c** indica che l'equilibrio da investigare è P_2. Gli autovalori sono gli zeri di $\lambda^2-11\lambda+40$, e sono quindi $(11\pm i\sqrt{39})/2$. L'autovettore relativo all'autovalore con parte immaginaria positiva si ottiene risolvendo $-2v_1+6v_2=\left(\frac{11}{2}+i\frac{\sqrt{39}}{2}\right)v_1v_2\Leftrightarrow 4v_1=\left(1-i\sqrt{39}\right)v_2$, che porge $v_r=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ e $v_i=\begin{pmatrix}-\sqrt{39}\\0\end{pmatrix}$. Questi autovettori permettono di disegnare il ritratto in fase



Usando la prima riga della matrice si otteneva invece $v_r = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{39} \end{pmatrix}$.

Vale la pena osservare che si poteva determinare il verso di rotazione semplicemente applicando la matrice A del sistema lineare in un vettore particolarmente facile. Infatti vale il seguente fatto: *se Av sta a destra dello spazio direttore orientato $\mathbb{R}v$ (i.e. $v \times Av < 0$) allora la rotazione è oraria, altrimenti è antioraria (in particolare si ha che $v \times Av \neq 0$).*

Nel sistema di riferimento $\Re v, \Im v$ (con v autovettore di autovalore con parte immaginaria positiva), il ritratto in fase ruota in senso orario. Questo ritratto viene linearmente deformato dalla matrice di cambiamento di base Q che ha per colonne $\Re v, \Im v$. Quindi il verso di rotazione sarà orario se $\det Q > 0$ ed antiorario altrimenti. D'altro canto il campo vettoriale di un fuoco ha matrice del tipo $A = Q \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} Q^{-1}$ con Q la matrice definita appena sopra. Scrivendo $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, segue che

$$v \times Av = \beta v \times Q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = -\beta v^T \begin{pmatrix} \frac{2(c^2+d^2)}{ad-bc} & -\frac{2(ac+bd)}{ad-bc} \\ -\frac{2(ac+bd)}{ad-bc} & \frac{2(a^2+b^2)}{ad-bc} \end{pmatrix} v$$

La segnatura di questa matrice è positiva se $\det Q < 0$ ed è negativa altrimenti.

In questo esercizio $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = -5$. Quindi il verso di avvolgimento è orario.

Soluzione all'esercizio 2

a. Derivando si ha

$$\dot{x} = (\tan \xi)^\bullet = \frac{\dot{\xi}}{\cos^2 \xi} = \frac{\eta \cos^4 \xi}{\cos^2 \xi} = \cos^2(\arctan x) y = \frac{y}{1+x^2},$$

mentre

$$\dot{y} = \dot{\eta} = e^{\tan \xi}(\sin^2 \xi - \cos^2 \xi) = \cos^2(\arctan x)\, e^x \left(\tan^2(\arctan x) - 1\right) = e^x \frac{x^2-1}{1+x^2}.$$

Riepilogando, il campo vettoriale coniugato ad X è

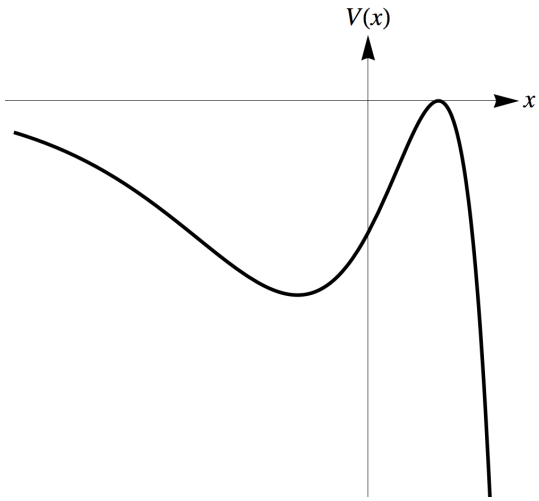
$$Y = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{1+x^2} \\ e^x \dfrac{x^2-1}{1+x^2} \end{pmatrix}$$

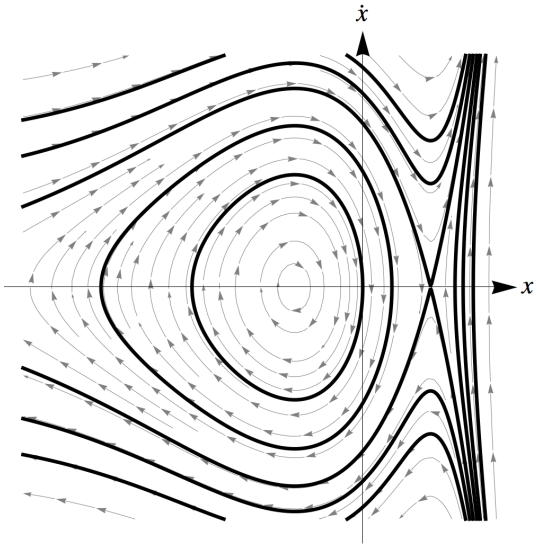
b. Il campo vettoriale Y è della forma fZ con $f = (1+x^2)^{-1}$ funzione positiva e

$$Z = \begin{pmatrix} y \\ e^x(x^2-1) \end{pmatrix}$$

campo vettoriale associato al sistema del II ordine scritto nel testo.

c. Il potenziale associato all'equazione è $V(x) = -e^x(x-1)^2$; infatti $-V'(x) = e^x(x^2-1)$. Quindi il ritratto in fase è





Soluzione alla domanda 1

Dalle note: Proposizione 6.1 pagina 155. Dall'autovalutazione relativa alla III settimana: domanda 14.

Soluzione alla domanda 2

Dalle note: Proposizione 3.1 pagina 48 ed esempi di pagina 50. Dall'autovalutazione relativa alla II settimana: domande 3 e 4.

Soluzione alla domanda 3

Dalle Note: Sezione 3.4.E. Dall'autovalutazione relativa alla II settimana: domande 12 e 13.