



**Esercizio 1.** Sia  $f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  e si consideri la mappa di  $\mathbb{R}^4 (\equiv T^*\mathbb{R}^2)$  in sè

$$\tilde{q}_1 = q_1, \quad \tilde{q}_2 = q_2, \quad \tilde{p}_1 = p_1 - f(q_1), \quad \tilde{p}_2 = p_2.$$

i. Dimostrare che è una trasformazione canonica di opportuna valenza  $c$  (trovarla); determinare per essa una funzione generatrice  $F_2$ .

ii. Considerare quindi l'Hamiltoniana

$$H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \quad H(q, p) = \frac{1}{2} (p_1 - q_1^3)^2 + \frac{1}{2} p_2^2 + \frac{1}{2} \omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 q_2^2$$

ed usando opportunamente (cioè, per opportuna  $f$ ) la trasformazione canonica del punto precedente si trasformi  $H(q, p)$  in una più semplice Hamiltoniana  $K(\tilde{q}, \tilde{p})$  generante un ben noto sistema dinamico differenziale lineare facilmente integrabile. Si imposti in dettaglio la determinazione delle soluzioni dell'originale sistema dinamico relativo a  $H$ .

**Domanda 2.** Data una Lagrangiana  $L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , si enunci e dimostri il Teorema/Principio Variazionale di Hamilton.

**Domanda 3.** Sia  $\Phi_{X_H}^t : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$  il flusso associato al campo vettoriale Hamiltoniano generato da un'Hamiltoniana  $H \in C^2(\mathbb{R}^{2N}; \mathbb{R})$ , si scrive:  $y = \Phi_{X_H}^t(x) = y(t, x)$ , e lo Jacobiano  $J(t, x) = \frac{\partial y}{\partial x}(t, x)$ .

i. Dimostrare che il flusso  $\Phi_{X_H}^t$  mappa insiemi misurabili  $\Omega \subset \mathbb{R}^{2N}$  di 'dati iniziali' in insiemi di ugual misura (o volume  $2N$ -dim)  $\Phi_{X_H}^t(\Omega) \subset \mathbb{R}^{2N}$ .

ii. Dimostrare che i diffeomorfismi di  $\mathbb{R}^2 (\equiv T^*\mathbb{R}^1)$  in sè che preservano il volume, nel senso del punto i), sono *esattamente* le trasformazioni canoniche 1-valenti di  $\mathbb{R}^2 (\equiv T^*\mathbb{R}^1)$  in sè.

- 
- Si può uscire dall'aula solo **dopo aver consegnato definitivamente** il compito.
  - Scrivere nome e cognome su ogni foglio di svolgimento consegnato.
  - **Svolgere il tema A su di un foglio, con la lettera A messa in evidenza.**
  - Consegnare tutti e solo i fogli di bella dedicati allo svolgimento. **Tenete brutta e testo del compito.**
  - Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.
-



**Domanda 1.** Data la Lagrangiana  $L$  relativa allo spazio di configurazioni  $\mathbb{R}^N$ ,

$$L(q_{k+1}, \dots, q_\alpha, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_N), \quad \alpha = k+1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, N$$

enunciare e dimostrare il metodo di riduzione di Routh.

**Esercizio 2.** Sia  $f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  e si consideri la mappa di  $\mathbb{R}^4 (\equiv T^*\mathbb{R}^2)$  in sè

$$\tilde{q}_1 = q_1, \quad \tilde{q}_2 = q_2, \quad \tilde{p}_1 = p_1 - f(q_1), \quad \tilde{p}_2 = p_2.$$

i. Dimostrare che è una trasformazione canonica di opportuna valenza  $c$  (trovarla); determinare per essa una funzione generatrice  $F_2$ .

ii. Considerare quindi l'Hamiltoniana

$$H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \quad H(q, p) = \frac{1}{2} (p_1 - q_1^3)^2 + \frac{1}{2} p_2^2 + \frac{1}{2} \omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 q_2^2$$

ed usando opportunamente (cioè, per opportuna  $f$ ) la trasformazione canonica del punto precedente si trasformi  $H(q, p)$  in una più semplice Hamiltoniana  $K(\tilde{q}, \tilde{p})$  generante un ben noto sistema dinamico differenziale lineare facilmente integrabile. Si imposti in dettaglio la determinazione delle soluzioni dell'originale sistema dinamico relativo a  $H$ .

**Domanda 3.** Sia  $\Phi_{X_H}^t : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$  il flusso associato al campo vettoriale Hamiltoniano generato da un'Hamiltoniana  $H \in C^2(\mathbb{R}^{2N}; \mathbb{R})$ , si scrive:  $y = \Phi_{X_H}^t(x) = y(t, x)$ , e lo Jacobiano  $J(t, x) = \frac{\partial y}{\partial x}(t, x)$ .

i. Dimostrare che il flusso  $\Phi_{X_H}^t$  mappa insiemi misurabili  $\Omega \subset \mathbb{R}^{2N}$  di 'dati iniziali' in insiemi di ugual misura (o volume  $2N$ -dim)  $\Phi_{X_H}^t(\Omega) \subset \mathbb{R}^{2N}$ .

ii. Dimostrare che i diffeomorfismi di  $\mathbb{R}^2 (\equiv T^*\mathbb{R}^1)$  in sè che preservano il volume, nel senso del punto i), sono *esattamente* le trasformazioni canoniche 1-valenti di  $\mathbb{R}^2 (\equiv T^*\mathbb{R}^1)$  in sè.

- 
- Si può uscire dall'aula solo **dopo aver consegnato definitivamente** il compito.
  - Scrivere nome e cognome su ogni foglio di svolgimento consegnato.
  - **Svolgere il tema B su di un foglio, con la lettera B messa in evidenza.**
  - Consegnare tutti e solo i fogli di bella dedicati allo svolgimento. **Tenete brutta e testo del compito.**
  - Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.
-

SOLUZIONE ALL'ESERCIZIO 1 VARIANTE A ED ESERCIZIO 2 VARIANTE B

i)

$$J\mathbb{E}J^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial q_1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\partial f}{\partial q_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(\text{ il conto si può fare utilizzando il prodotto per blocchi } 2 \times 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{E}$$

pertanto:  $c = 1$ . Una funzione generatrice è

$$F_2(q, \tilde{p}) = q \cdot \tilde{p} + \int_{cost.}^{q_1} f(\lambda) d\lambda$$

con Hessiano  $\frac{\partial^2 f}{\partial q \partial \tilde{p}}$  uguale all'identità.

ii) Data

$$H(q, p) = \frac{1}{2} (p_1 - q_1^3)^2 + \frac{1}{2} p_2^2 + \frac{1}{2} \omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 q_2^2$$

La  $F_2$  di cui sopra con  $f(q_1) = q_1^3$  trasforma  $H$  in

$$K(\tilde{q}, \tilde{p}) = \frac{1}{2} \tilde{p}_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{p}_2^2 + \frac{1}{2} \omega_1^2 \tilde{q}_1^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 \tilde{q}_2^2$$

che sono due oscillatori armonici disaccoppiati. La trasformata mediante l'inversa

$$q_1 = \tilde{q}_1$$

$$q_2 = \tilde{q}_2$$

$$p_1 = \tilde{p}_1 + \tilde{q}_1^3$$

$$p_2 = \tilde{p}_2$$

dell'integrale generale degli osc. armonici ( $i = 1, 2$ ) :

$$\tilde{q}_i(t, a_i, b_i) = a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t$$

$$\tilde{p}_i(t, a_i, b_i) = -a_i \omega_i \sin \omega_i t + b_i \omega_i \cos \omega_i t$$

dà la soluzione cercata.

SOLUZIONE ALLA DOMANDA 3

i) Il flusso di un sistema canonico è T.C. 1-valente,  $c = 1$ . Dunque:  $|\det J(x, t)| \equiv 1$ , e dato che per  $t = 0$  si ha che  $J = \mathbb{I}$ ,  $\det J \equiv 1$ ; il t. del cambio delle variabili d'integrazione negli integrali multipli ci assicura l'invarianza cercata:  $Vol(\Phi_{X_H}^t(\Omega)) = \int_{\Phi_{X_H}^t(\Omega)} d^{2N}y = \int_{\Omega} |\det J(x, t)| d^{2N}x = \int_{\Omega} d^{2N}x = Vol(\Omega)$ .

ii)

$$J\mathbb{E}J^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} \\ \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} - \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} & -\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \\ -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} & -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \det J \\ -\det J & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{E}$$