FISICA MATEMATICA - 24 luglio 2013 - Corso di Laurea in Matematica

Attenzione: Riconsegnate TRE fogli (protocollo a 4 facciate) su cui sono separatamente svolti i quesiti 1, 2 e 3, con cognome e nome e con il numero messo in evidenza. Niente brutte copie. Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

1.1 - Sia X il campo vettoriale lineare associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$:
i. disegnare il ritratto in fase;
ii. scrivere esplicitamente il flusso $\Phi_X^t(x_0, y_0)$ con $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ dato iniziale generico.

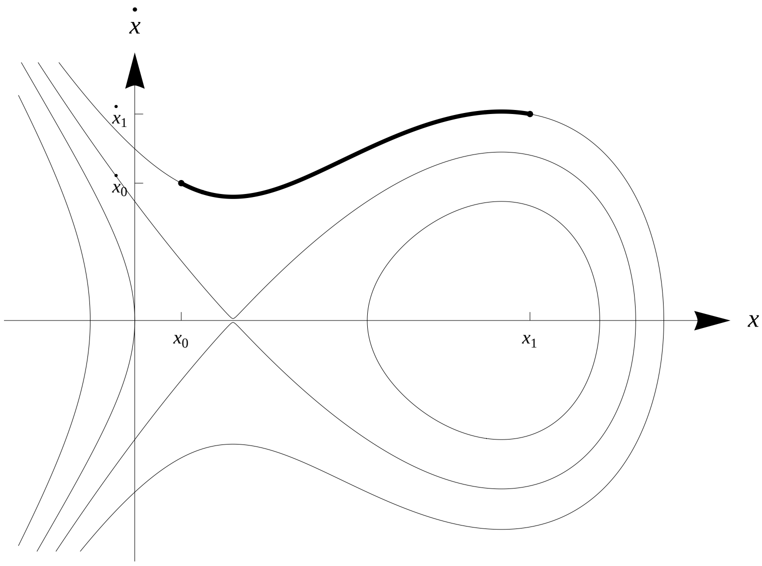
1.2 - Sia dato il sistema di Newton $\ddot{x} = -V'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
i. Si scriva una funzione $E(x, \dot{x})$ integrale primo del sistema.
ii. Dati due punti in configurazione $x_0 < x_1$ e due velocità $\dot{x}_0, \dot{x}_1$ entrambe maggiori di 0 tali che

$$E(x_0, \dot{x}_0) = E(x_1, \dot{x}_1) = e$$

ed i punti $(x_0, \dot{x}_0), (x_1, \dot{x}_1)$ appartengono alla stessa componente connessa di un livello regolare di E (vedi figura), si usi la relazione

$$\dot{x} = \sqrt{2(e - V(x))}$$

per scrivere in forma integrale il tempo che impiega il flusso ad andare da $(x_0, \dot{x}_0)$ ad $(x_1, \dot{x}_1)$.



2

2.1 - Nel piano Oxy di un riferimento $Oxyz$ con l'asse y verticale ascendente, rotante rispetto ai riferimenti inerziali con velocità angolare costante $\omega = \omega\hat{y}$, giace una guida rettilinea passante per i punti $A = (0, d)$ e $B = (d, 0)$. Un sistema di ascissa s è stabilito sulla guida con origine nel punto A e orientato positivamente nel verso da A a B. Un disco di massa m e raggio R è vincolato con il baricentro G a scorrere senza attrito sulla guida e a rotolare senza strisciare su una guida parallela alla guida passante per A B e posta a distanza R dalla prima. Inoltre, sulla guida per A B scorre in modo liscio un punto materiale P di massa M. Oltre alla gravità, sul sistema agiscono due molle di eguale costante elastica h, una tra il baricentro G del disco e il punto G' di eguale ordinata sull'asse y e una posta tra il baricentro G del disco e il punto P. Si riferisca la posizione del disco alla ascissa $x = x_G$ del suo baricentro e la posizione del punto P alla sua ascissa s sulla guida (per esempio $s_P = 0$ se $P \equiv A$).
i. Mostrare che la forza di Coriolis ha componenti Lagrangiane nulle.
ii. Scrivere l'energia potenziale $\mathcal{U}(x, s)$ delle forze conservative agenti sul sistema e scrivere il sistema di equazioni che determina gli equilibri (x_{eq}, s_{eq}).
iii. Scrivere le condizioni sui parametri per cui esista un solo equilibrio e tale equilibrio sia stabile. *Non occorre determinare esplicitamente tale equilibrio.*
iv. Scrivere l'energia cinetica del sistema.

2.2 - Dimostrare che le rotazioni uniformi di un corpo rigido pesante attorno all'asse di momento d'inerzia mediano sono instabili.

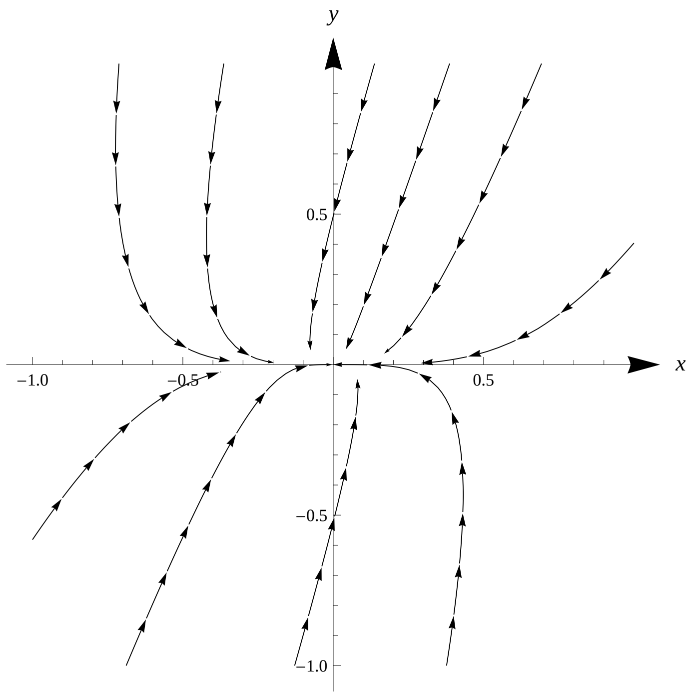
3

3.1 - Dimostrare che il flusso di un sistema Hamiltoniano è una trasformazione canonica 1-valente.

3.2 - Cos'è la trasformata di Legendre? Qual è la condizione affinché sia un diffeomorfismo locale? e una condizione globale?

Soluzione all'esercizio 1.1

i. Si ha che $\mathrm{tr}A = -5$ e $\det A = 4$. Quindi il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 5\lambda + 4$. Gli autovalori sono $\lambda_1 = -5/2 - 3/3 = -4$ e $\lambda_2 = -5/2 + 3/2 = -1$ mentre i rispettivi autovettori sono $v_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right)$ e $v_2 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$. Segue che il ritratto in fase è



ii. Visto che le matrici di cambiamento di base sono $P = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\3 & 0\end{smallmatrix}\right)$ e $P^{-1} = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\3 & -1\end{smallmatrix}\right)$ si calcola la mappa esponenziale usando l'identità

$$e^{tA} = P\begin{pmatrix}e^{-4t} & 0\\0 & e^{-t}\end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3e^{-t} & e^{-4t} - e^{t}\\0 & 3e^{-4t}\end{pmatrix}.$$

Si ottiene quindi che il flusso è la funzione $\Phi^X : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}^2_{x,y}$ data da

$$\Phi^X_t\left(\begin{smallmatrix}x_0\\y_0\end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3e^{-t} & e^{-4t}-e^{-t}\\0 & 3e^{-4t}\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}x_0\\y_0\end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3x_0e^{-t}+(e^{-4t}-e^{-t})y_0\\3y_0e^{-4t}\end{pmatrix}.$$

Soluzione all'esercizio 2.1

i. I vettori v_x e w_X rispettivamente velocità del punto e velocità permessa dal vincolo appartengono al piano del moto assieme a ω. Si ha quindi che la potenza della sollecitazione è

$$P = \int_{X\in D} -2\rho\omega \times v_X \cdot w_X \equiv 0$$

Questo è equivalente a dire che la forza di Coriolis è sempre perpendicolare al piano del moto.
ii. Per il disco (uso il T di Steiner per il calcolo del momento d'inerzia del disco rispetto all'asse y)

$$U = U^g + U^{el} + U^{cf} = mg(d-x) + \frac{h}{2}x^2 - \frac{\omega^2}{2}(mx^2 + \frac{mR^2}{4}).$$

per il punto

$$U = U^g + U^{el} + U^{cf} = Mg(d - \frac{s}{\sqrt{2}}) + \frac{h}{2}(s - x\sqrt{2})^2 - \frac{\omega^2}{2}M(\frac{s}{\sqrt{2}})^2$$

Le configurazioni di equilibrio sono i punti ove $\nabla U = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} &= -mg + (h - m\omega^2)x - \sqrt{2}hs + 2hx = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial s} &= -\frac{Mg}{\sqrt{2}} - \frac{M\omega^2}{2}s + hs - \sqrt{2}hx = 0 \end{cases}$$

Il sistema è quindi lineare della forma $BX = C$.
iii. La condizione per avere una soluzione unica non nullaè

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 3h - m\omega^2 & -\sqrt{2}h \\ -\sqrt{2}h & h - M\frac{\omega^2}{2} \end{pmatrix} \neq 0$$

e quindi $(3h - m\omega^2)(h - M\frac{\omega^2}{2}) - 2h \neq 0$. La condizione ii) perchè l'equilibrio $X_{eq} = B^{-1}C$ sia stabile è (Teorema THND) che $B = H_U \in Sym^+$ e quindi

$$3h - m\omega^2 > 0, \quad \det B > 0.$$

iv. l'energia cinetica del sistema è (per la condizione di puro rotolamento $s = x_G\sqrt{2} = R\theta$)

$$T = T_D + T_P = \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}\omega I_G \omega + \frac{M}{2}v_P^2$$

$$T = \frac{m}{2}2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\frac{2\dot{x}^2}{R^2} + \frac{M}{2}\dot{s}^2 = \frac{1}{2}(3m\dot{x}^2 + M\dot{s}^2)$$

La matrice dell'energia cinetica è quindi diagonale $A = Diag[3m, M]$. Le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni di

$$\det(H_U - \Omega^2 A) = 0.$$