

Laurea I livello in Matematica
Fisica Matematica, mod. A (2012-2013)
Domande ed esercizi

terza settimana

Argomenti trattati

Dalle note *Primo sguardo ai sistemi dinamici*, di F. Fassò: Cap. 4 (meno 4.3.C). La sezione 4.3.A non è stata trattata in modo esplicito, ma è istruttivo leggerla. Sezioni 6.1 e 6.3 (senza dimostrazioni).

Domande di teoria

1. Cos'è un sistema lineare? Come si calcola il suo flusso?
2. Come è definita e come si calcola la esponenziale di una matrice?
3. Enunciare e dimostrare 3 proprietà fondamentali relative all'esponenziale di matrici
4. Saper calcolare l'esponenziale di tutte le matrici in *forma normale* studiate in classe
5. Quale forma ha la matrice associata ad una equazione differenziale lineare di ordine n a coefficienti costanti? Quale proprietà notevole ha tale matrice?
6. In che modo si usa la proprietà $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^AP$ nel calcolo dell'esponenziale della matrice A ?
7. Discutere i ritratti in fase dei sistemi lineari nel piano, nel caso di matrice 2×2 diagonalizzabile senza blocchi di Jordan.
8. Saper associare ai punti del piano traccia-determinante uno schizzo del ritratto in fase dei sistemi lineari ad essi associati. Giustificare l'associazione.

9. Definizione di sottospazio stabile, instabile, centrale, di sottovarietà stabile, instabile (e centrale), legame con questi.
10. Definizione di equilibrio iperbolico
11. Enunciato del teorema di Grobman-Hartman
12. Enunciato del teorema della varietà stabile
13. Definizione di stabilità, stabilità asintotica, ed instabilità
14. Enunciato del teorema spettrale di Lyapunov
15. Esiste un teorema della varietà centrale senza fare ulteriori ipotesi sul campo vettoriale?

Esercizio 1 *Sia X il campo vettoriale lineare associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Disegnare il ritratto in fase mostrando, nel caso di nodi e selle gli autospazi stabile ed instabile, e nel caso dei fuochi il verso di avvolgimento.*

Esercizio 2 *Sia X il campo vettoriale lineare associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Disegnare il ritratto in fase mostrando, nel caso di nodi e selle gli autospazi stabile ed instabile, e nel caso dei fuochi il verso di avvolgimento.*

Esercizio 3 *Sia X il campo vettoriale lineare associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Disegnare il ritratto in fase mostrando, nel caso di nodi e selle gli autospazi stabile ed instabile, e nel caso dei fuochi il verso di avvolgimento.*

Esercizio 4 *Sia X il campo vettoriale lineare associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Disegnare il ritratto in fase mostrando, nel caso di nodi e selle gli autospazi stabile ed instabile, e nel caso dei fuochi il verso di avvolgimento.*

Esercizio 5 *Determinare gli equilibri per il sistema di equazioni differenziali*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y - xy^2 \\ \dot{y} &= -x - 2y + x^2y \end{aligned}$$

e studiare la stabilità del sistema con il metodo spettrale attorno all'origine ed all'unico equilibrio nel I quadrante.