Laurea I livello in Matematica
Fisica Matematica, mod. A (2012-2013)
Domande ed esercizi

seconda settimana

Argomenti trattati

Dalle note *Primo sguardo ai sistemi dinamici*, di F. Fassò: Sez. 3.1, 3.2, 3.3.C, 3.3.D, 3.4 (fuorché 3.4.C), 3.5.

Domande di teoria

1. Cos'è il flusso di un campo vettoriale? Scrivere l'espressione di un flusso a scelta.

2. Che proprietà ha il flusso di un campo vettoriale? Dimostrarle.

3. Cosa si intende per dipendenza sensibile dai dati iniziali?

4. Enunciare e dimostrare la stima sulla separazione al più esponenziale delle soluzioni. Tale stima è ottimale (supportare la risposta con esempi)?

5. Quando due campi vettoriali X ed Y si dicono coniugati? Che relazione intercorre tra le soluzioni di due campi vettoriali coniugati?

6. Un cambiamento di coordinate $\mathcal{C} : U \to V$ coniuga un campo vettoriale X in U and un campo vettoriale Y in V. Qual'è l'espressione di Y? Dimostrarlo.

7. Illustrare con un esempio l'effetto di un cambiamento di coordinate su di un campo vettoriale.

8. Cosa è il pull-back ed il push-forward di un campo vettoriale sotto un diffeomorfismo?

9. Si può usare un diffeomorfismo locale per riscrivere un campo vettoriale? Che proprietà ha il campo vettoriale così ottenuto?

10. Cosa si può dire delle orbite del campo vettoriale $f\,X$ dove f è una funzione positiva sullo spazio delle fasi ed X un campo vettoriale?

11. Se $x : \mathbb{R} \to \Omega$, $t \mapsto x(t)$ è una soluzione del campo vettoriale X, cosa si può dire della funzione $t \to x(\tau(t))$ dove τ è diffeomorfismo di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$?

12. Cosa sono i cambiamenti di coordinate estesi?

13. Mostrare che proprietà che deve avere un diffeomorfismo $\mathcal{C} : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \Omega' \times \mathbb{R}^n$, $(x, v) \mapsto (F(x), G(x, v)$ affinché mandi equazioni del II ordine in equazioni del II ordine.

14. Cos'è un diagramma di biforcazione? Scrivere un sistema che presenti una biforcazione e disegnare il relativo diagramma di biforcazione. Conoscete un sistema discusso in classe che, nonostante dipenda da parametri, non presenta biforcazioni?

Esercizio 1 *Riscrivere il campo vettoriale dell'oscillatore armonico $\dot{x} = v$, $\dot{v} = -\omega^2 x$ usando il cambio di coordinate ellittiche $x = r\cos\vartheta$, $v = r\,a\,\sin\vartheta$ di inversa*

$$r = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{a^2}}, \qquad \vartheta = \arg\left(x, \frac{v}{a}\right).$$

Quanto deve valere a per rendere l'espressione del campo vettoriale particolarmente semplice?

Esercizio 2 *Riscrivere ed integrare il sistema lineare*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

nelle coordinate $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = -x_1 + x_2$.

Esercizio 3 *Le coordinate paraboliche sono date da*

$$\mathbb{R}^+_u \times \mathbb{R}_v \to \mathbb{R}^2_{x,y} \setminus \{x = 0, y < 0\}, \quad (u, v) \to \left(uv, \frac{1}{2}(u^2 - v^2)\right),$$

e la loro inversa è la trasformazione

$$\mathbb{R}^2_{x,y} \setminus \{x = 0, y < 0\} \to \mathbb{R}^+_u \times \mathbb{R}_v, \quad (x, y) \to \left(\sqrt{y + \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{y + \sqrt{x^2 + y^2}}}\right).$$

Si consideri il campo vettoriale $\left(y+\sqrt{x^2+y^2},-x\right)$. *Lo si riscriva in coordinate paraboliche e in tali coordinate lo si integri.*

Esercizio 4 *Le coordinate sferiche, usate per parametrizzare la sfera con l'eccezione dei due poli sono*

$$\Theta : (\varphi,\vartheta) \to (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta) \tag{1}$$

con $\varphi \in (0,2\pi)$ *e* $\vartheta \in (0,\pi)$. *Si consideri il campo vettoriale* X *che, in tali coordinate, ha l'espressione* $(1,0)$. *Le calotte della sfera si possono parametrizzare anche usando le due possibili scelte di coordinate cartesiane*

$$\Phi : (x,y) \to (x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}), \quad \Psi : (x,z) \to (x,\sqrt{1-x^2-z^2},z).$$

Si riscriva il campo vettoriale X *usando questi due sistemi di coordinate.*

Suggerimento: nel caso della scelta delle coordinate date da Φ*, si tratta di usare il cambiamento di coordinate* $(\varphi,\vartheta) \to (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi)$*, di inversa* $(x,y) \to \left(\arg(x+Iy), \arcsin(\sqrt{x^2+y^2})\right)$. *Nel caso di* Ψ *si usa invece il cambiamento di coordinate* $(\varphi,\vartheta) \to (\sin\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta)$*, di inversa* $(x,z) \to \left(\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}\right), \arccos(z)\right)$.

Esercizio 5 *Si consideri il campo vettoriale*

$$X = \begin{pmatrix} y\left((x^2+y^2)^3+2\right) \\ -x\left((x^2+y^2)^3+2\right) \end{pmatrix}.$$

Riscrivere il campo vettoriale in coordinate polari e poi determinare il riscalamento temporale che lo semplifichi.

Esercizio 6 *Si riscriva in coordinate polari il sistema del secondo ordine* $\ddot{x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\ddot{y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *ed il sistema del secondo ordine* $\ddot{x} = -y$, $\ddot{y} = x$