Laurea I livello in Matematica
Fisica Matematica, mod. A (2012-2013)
Domande ed esercizi

quarta settimana

Argomenti trattati

Dalle note *Primo sguardo ai sistemi dinamici*, di F. Fassò: Sez 3.6, Sez 5.1, 5.2, 5.4 (no 5.4.D), 5.5, 5.6, 5.3 (senza costruzione dell'integrale primo nè l'analisi delle sue curve di livello), 5.7.

Domande di teoria

1. Cos'è un insieme invariante di un'equazione differenziale? E un integrale primo? Che relazione c'è tra essi?

2. Cosa si deve fare per controllare che una funzione sia un integrale primo? Cos'è una derivata di Lie?

3. Data una funzione F ed un suo livello $N_f = \{F = f\}$, cosa significa geometricamente la condizione $X \cdot \nabla F$? Cosa significa geometricamente che F è invariante per il flusso Φ_X^t?

4. Dato un integrale primo F di X ed un cambiamento di coordinate $\mathcal{C}$, quale potrebbe essere un integrale primo del campo vettoriale $Y = \mathcal{C}_* X$?

5. Dato il sistema lineare, in che casi è possibile trovare un integrale del moto? In che casi è possibile trovare un integrale del moto continuo anche nell'origine?

6. Esiste una relazione tra la condizione X è tangente ad N e la condizone N è invariante per il flusso Φ_X^T?

7. Se un campo vettoriale X ha un integrale primo non triviale, è possibile che esso abbia anche un equilibrio asintoticamente stabile?

8. Dato un sistema conservativo, scrivere l'integrale dell'energia.
9. Saper disegnare il ritratto in fase di un sistema conservativo 1D a partire da un potenziale dato $V(x)$.
10. Enunciare il teorema sull'abbassamento dell'ordine per un equazione differenziale e dimostrarlo.
11. Cos'è un punto di inversione per un sistema di Newton 1D?
12. Dato un sistema di Newton 1D e due punti in configurazione $x_0 < x_1$, e le velocità $v_0, v_1 > 0$ tali che $(x_0, \dot{x}_0)$, (x_1, v_1) appartengono alla stessa componente connessa dell'insieme $\{E = e\}$, come si calcola il tempo che impiega il flusso ad andare da x_0 ad x_1

Gli esercizi che seguono sono stati in parte svolti alle lezioni di tutorato. Alcuni sono stati assegnati la precedente autovalutazione, e sono riportati qui con una soluzione molto schematica. In generale tutte le soluzioni sono molto schematiche, usatele solo per controllare i vostri conti.

Esercizio 1 *Si consideri il campo vettoriale* $\left(\begin{smallmatrix} -y \\ x \end{smallmatrix}\right) + \varepsilon(x^2+y^2)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = A + \varepsilon B$ *con* ε *piccolo sia positivo che negativo. Si osservi che* $B = fC$ *dove* $C = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ *ed* $f(x,y) = \varepsilon(x^2+y^2)$.
a. *Si usi la tecnica della riparametrizzazione temporale per determinare la funzione* $\tau(t)$ *dipendente dal dato iniziale* (x_0, y_0), *che riparametrizza una soluzione di* C *in una soluzione di* εB *(suggerimento: la soluzione di* C *è* $e^t\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ *e quindi* τ *deve soddisfare* $\dot{\tau} = \varepsilon e^{2\tau}(x_0^2+y_0^2)$*). Scrivere quindi il flusso di* $\Phi^t_{\varepsilon B}$ *ed osservare che si tratta sempre di una omotetia, che contrae il piano se* ε *è negativo e lo espande se* ε *è positivo.*
b. *Si usi l'informazione che, siccome i due flussi commutano, allora*

$$\Phi_{A+\varepsilon B} = \Phi_A \circ \Phi_{\varepsilon B}$$

per ottenere dei campi vettoriali con sottospazio centrale $\mathbb{R}^2$ *ma per i quali l'origine è equilibrio attrattivo/repulsivo.*

Esercizio 2 *Si consideri il sistema di equazioni differenziali*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (-x+2y)(1+x) \\ \dot{y} &= 2y(1+x). \end{aligned}$$

Si verifichi che la funzione

$$I(x,y) = (x - \frac{2}{3}y)^2 y$$

è integrale primo. Si linearizzi il sistema attorno al punto di equilibrio $(0,0)$ *e si determini l'integrale generalizzato del sistema linearizzato. Si determini la soluzione del sistema linearizzato con dati iniziali* $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Esercizio 3 *Le coordinate paraboliche sono date da*

$$\mathbb{R}^+_u \times \mathbb{R}_v \to \mathbb{R}^2_{x,y} \setminus \{x = 0, y < 0\}, \quad (u, v) \to \left(uv, \frac{1}{2}(u^2 - v^2)\right),$$

e la loro inversa è la trasformazione

$$\mathbb{R}^2_{x,y} \setminus \{x = 0, y < 0\} \to \mathbb{R}^+_u \times \mathbb{R}_v, \quad (x, y) \to \left(\sqrt{y + \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{y + \sqrt{x^2 + y^2}}}\right).$$

Si consideri il campo vettoriale $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}, -x\right)$. *Lo si riscriva in coordinate paraboliche e in tali coordinate lo si integri.*

Con un conto si ha che

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= \frac{1}{2\sqrt{y + \sqrt{x^2 + y^2}}}\left(\dot{y} + \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{\bullet}\right) = \frac{1}{2u}(-x + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x\dot{x} + y\dot{y})) = \\
&= \frac{1}{2u}\Big(-x + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(xy + x\sqrt{x^2 + y^2} - yx)\Big) = 0 \\
\dot{v} &= \frac{\dot{x}}{u} - \frac{u}{2u^3}\left(\dot{y} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x\dot{x} + y\dot{y})\right) = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{u} = u.
\end{aligned}$$

Quindi le soluzioni in coordinate paraboliche sono $u \equiv u_0$ e $v = v_0 + u_0 t$.

Esercizio 4 *Le coordinate sferiche, usate per parametrizzare la sfera con l'eccezione dei due poli sono*

$$\Theta : (\varphi, \vartheta) \to (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta) \tag{1}$$

con $\varphi \in (0, 2\pi)$ *e* $\vartheta \in (0, \pi)$. *Si consideri il campo vettoriale* X *che, in tali coordinate, ha l'espressione* $(1, 0)$. *Le calotte della sfera si possono parametrizzare anche usando le due possibili scelte di coordinate cartesiane*

$$\Phi : (x, y) \to (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}), \quad \Psi : (x, z) \to (x, \sqrt{1 - x^2 - z^2}, z).$$

Si riscriva il campo vettoriale X *usando questi due sistemi di coordinate.*

Suggerimento: nel caso della scelta delle coordinate date da Φ*, si tratta di usare il cambiamento di coordinate* $(\varphi, \vartheta) \to (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi)$, *di inversa* $(x,y) \to \Big(\arg(x+Iy), \arcsin(\sqrt{x^2+y^2})\Big)$. *Nel caso di* Ψ *si usa invece il cambiamento di coordinate* $(\varphi,\vartheta) \to (\sin\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta)$, *di inversa* $(x,z) \to \left(\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}\right), \arccos(z)\right)$.

Il campo vettoriale sopra descritto è un campo vettoriale definito sulla sfera di raggio 1. Le tre scelte di coordinate φ, ϑ, x, y ed x, z sono possibili coordinate per parametrizzare una parte della sfera. Di conseguenza il campo vettoriale che, in coordinate φ, ϑ ha componenti $1, 0$ si può riscrivere nelle altre coordinate. Si tratta quindi di un esercizio di cambio di coordinate così come specificato nella seconda parte dell'esercizio.

La prima scelta di cambio di coordinate è associato alla mappa

$$\mathcal{C} : (\varphi,\vartheta) \to (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi),$$

di inversa

$$\mathcal{C}^{-1} : (x,y) \to (\arg(x+Iy), \arcsin(\sqrt{x^2+y^2})).$$

Segue che il campo vettoriale si riscrive usando

$$J\mathcal{C} = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) & \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi)\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Un conto restituisce il campo vettoriale $(-y, x)$, che è la rotazione uniforme.

Si poteva procedere più direttamente scrivendo

$$\dot{x} = (\sin\vartheta\cos\varphi)^{\bullet} = \cos\vartheta\,\dot{\vartheta}\,\cos\varphi - \sin\vartheta\,\sin\varphi\,\dot{\varphi} = -\sin\vartheta\,\sin\varphi = -y,$$

$$\dot{y} = (\sin\vartheta\sin\varphi)^{\bullet} = \cos\vartheta\,\dot{\vartheta}\,\sin\varphi + \sin\vartheta\,\cos\varphi\,\dot{\varphi} = \sin\vartheta\,\cos\varphi = x.$$

La seconda proposta di coordinate è associata alla mappa

$$\mathcal{C} : (\varphi,\vartheta) \to (\sin\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta), \quad \mathcal{C}^{-1} : (x,z) \to (\arccos(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}), \arccos(z)).$$

Applicando subito il procedimento più diretto si ottiene

$$\dot{x} = (\sin\vartheta\cos\varphi)^{\bullet} = \cos\vartheta\,\dot{\vartheta}\,\cos\varphi - \sin\vartheta\,\sin\varphi\,\dot{\varphi} = -y = -\sqrt{1-x^2-z^2},$$

$$\dot{z} = 0.$$

Esercizio 5 *Si consideri il campo vettoriale*

$$X = \begin{pmatrix} y\left((x^2+y^2)^3+2\right) \\ -x\left((x^2+y^2)^3+2\right) \end{pmatrix}.$$

Riscrivere il campo vettoriale in coordinate polari e poi determinare il riscalamento temporale che lo semplifichi.

In coordinate polari il campo vettoriale diventa

$$\dot{\vartheta} = -(\rho^6 + 2), \quad \dot{\rho} = 0.$$

Questo campo vettoriale è $f(\rho, \tau) = -(\rho^6+2)$ (funzione sempre negativa) per il campo vettoriale $(1, 0)$, le cui soluzioni sono $\rho(t) \equiv \rho_0$ e $\vartheta(t) = t + \vartheta_0$.

Segue che le soluzioni del sistema originale sono una riparametrizzazione del sistema di partenza per mezzo di una funzione $\tau(t)$ che soddisfi a $\dot{\tau} = f(\rho(\tau), \vartheta(\tau)) = -(\rho_0^6 + 2)$. Ovviamente, la soluzione di questa equazione differenziale è $\tau(t) = -(\rho_0^6+2)t$. Si ha quindi che la soluzione del sistema di partenza, con dato iniziale ϑ_0, ρ_0 è la funzione

$$\rho(t) \equiv \rho_0, \quad \vartheta(t) = -(\rho_0^6 + 2)t + \vartheta_0$$

Si poteva osservare questo fatto anche in coordinate cartesiane. Infatti il campo vettoriale è fX dove $X(x, y) = (-y, x)$, il campo dell'oscillatore armonico ed $f(x, y) = \Big((x^2 + y^2)^3 + 2\Big)$, funzione sempre negativa.

Esercizio 6 *Si riscriva in coordinate polari il sistema del secondo ordine* $\ddot{x} = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\ddot{y} = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *ed il sistema del secondo ordine* $\ddot{x} = -y$, $\ddot{y} = x$

Le coordinate polari sono $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\vartheta = \arg(x + Iy)$. Si ha quindi che $\dot{r} = \dfrac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}$, $\dot{\vartheta} = \dfrac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}$, e $\ddot{r} = \dfrac{\dot{x}^2 - x\frac{x}{r} + \dot{y}^2 - y\frac{y}{r}}{r} - \dfrac{(x\dot{x}+y\dot{y})^2}{r^3} = -1 + \dfrac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)r^2 - (x\dot{x}+y\dot{y})^2}{r^3} = -1 + \dfrac{(x\dot{y}-y\dot{x})^2}{r^3} = -1 + r\dot{\vartheta}^2$, mentre $\ddot{\vartheta} = \dfrac{x\ddot{y} - y\ddot{x}}{r^2} - 2\dfrac{x\dot{y}-y\dot{x}}{r^4}(x\dot{x}+y\dot{y}) = -2\dfrac{\dot{\vartheta}\,\dot{r}}{r}$.

Conti simili per nell'altro caso porgono $\ddot{r} = \dfrac{\dot{x}^2 + xy + \dot{y}^2 - yx}{r} - \dfrac{(x\dot{x}+y\dot{y})^2}{r^3} = \dfrac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)r^2 - (x\dot{x}+y\dot{y})^2}{r^3} = r\,\dot{\vartheta}^2$, mentre $\ddot{\vartheta} = \dfrac{x^2+y^2}{r^2} - 2\dfrac{x\dot{y}-y\dot{x}}{r^4}(x\dot{x}+y\dot{y}) = 1 - 2\dfrac{\dot{\vartheta}\,\dot{r}}{r}$.

Esercizio 7 *Si consideri il campo vettoriale* $X(x, y) = (1, 2x)$.
a. *Si scrivano le soluzioni* $t \to (x_i(t), y_i(t))$, $i = 1, 2$ *di dati iniziali rispettivamente* $(0, 0)$ *e* $(1, 1)$.
b. *Si calcoli la riparametrizzazione temporale* $t \to \tau(t)$ *che, composta con tali soluzioni, le rende soluzioni del campo vettoriale* $Y = (x^2 + 1)X$.

a. Dalle equazioni associate ad X si ha che $x(t) = x_0 + t$ ed $y(t) = 2x_0 t + t^2 + y_0$. Le due soluzioni richieste sono quindi

$$(x_1(t), y_1(t)) = (t, t^2), \quad (x_2(t), y_2(t)) = (1 + t, 2t + t^2 + 1).$$

b. Nel caso della prima soluzione, la riparametrizzazione temporale deve soddisfare a $\dot{\tau} = (x^2+1) \circ (\tau, \tau^2) = (\tau^2+1)$. Quindi si ha che $\arctan(\tau) = t+c$, i.e. $\tau = \tan(t + c)$. Il fatto che $\tau(0) = 0$ porge $c = 0$. La soluzione cercata è

$$t \to \Big(\tan(t), \tan^2(t)\Big)$$

Nel caso della seconda soluzione, la riparametrizzazione temporale deve soddisfare a $\dot{\tau} = (x^2 + 1) \circ (1 + \tau, 2\tau + \tau^2 + 1) = ((\tau + 1)^2 + 1)$. Quindi si ottiene che $\arctan(\tau + 1) = t + c$, i.e $\tau = \tan(t + c) - 1$. Il fatto che $\tau(0) = 0$ porge $c = \pi/4$. Le soluzione cercata è

$$\begin{aligned}
&\Big(1 + (\tan(t + \frac{\pi}{4}) - 1), 2(\tan(t + \frac{\pi}{4}) - 1) + (\tan(t + \frac{\pi}{4}) - 1)^2 + 1\Big) = \\
&= \Big(\tan(t + \frac{\pi}{4}), 2\tan(t + \frac{\pi}{4}) - 2 + \tan^2(t + \frac{\pi}{4}) + 1 - 2\tan(t + \frac{\pi}{4}) + 1\Big) = \\
&= \Big(\tan(t + \frac{\pi}{4}), \tan^2(t + \frac{\pi}{4})\Big)
\end{aligned}$$

Esercizio 8 *Sia X il campo vettoriale lineare associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Disegnare il ritratto in fase mostrando, nel caso di nodi e selle gli autospazi stabile ed instabile, e nel caso dei fuochi il verso di avvolgimento.*

Si tratta di una matrice con autovalori $2 \pm i$, di autovettori $(\pm i, 1)$. Si tratta quindi di un fuoco instabile. I vettori $v^{(r)} = (0, 1)$ e $v^{(i)} = (1, 0)$.

Esercizio 9 *Sia X il campo vettoriale lineare associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Disegnare il ritratto in fase mostrando, nel caso di nodi e selle gli autospazi stabile ed instabile, e nel caso dei fuochi il verso di avvolgimento.*

Si tratta di una matrice con autovalori $\frac{1}{2}\left(5 \pm i\sqrt{7}\right)$ di autovettori $(1 \pm i\sqrt{7}, 4)$. Si tratta quindi di un fuoco instabile. I vettori rilevanti sono $v^{(r)} = (1, 4)$ e $v^{(i)} = (\sqrt{7}, 0)$.

Esercizio 10 *Sia X il campo vettoriale lineare associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Disegnare il ritratto in fase mostrando, nel caso di nodi e selle gli autospazi stabile ed instabile, e nel caso dei fuochi il verso di avvolgimento.*

Si tratta di una matrice con autovalori $-1\pm\sqrt{5}$ e di autovettori $(2\pm\sqrt{5},1)$. Si tratta quindi di una sella.

Esercizio 11 *Sia X il campo vettoriale lineare associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Disegnare il ritratto in fase mostrando, nel caso di nodi e selle gli autospazi stabile ed instabile, e nel caso dei fuochi il verso di avvolgimento.*

Gli autovettori sono $3 \pm i$, gli autovettori sono $(\pm i, 1)$.

Esercizio 12 *Si consideri il campo vettoriale*

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{xz}{x^2+y^2} - y \\ \dfrac{yz}{x^2+y^2} + x \\ 1 \end{pmatrix}$$

definito in $\mathbb{R}^3$ meno l'asse delle z.
a. *Si calcolino gli equilibri del sistema.*
b. *Si dimostri che la funzione $F = x^2 + y^2 - z^2$ è integrale del moto.*
c. *Si riscriva X nel sistema nelle coordinate*

$$s = z, \quad \vartheta = \arg(x,y), \quad u = x^2 + y^2 - z^2,$$

la cui inversa

$$\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_\vartheta \times \mathbb{R}^+_u \to \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^+_y \times \mathbb{R}_z,$$

$$(s,\vartheta,u) \to (\sqrt{s^2+u}\cos\vartheta, \sqrt{s^2+u}\sin\vartheta, s)$$

parametrizza, una volta fissato $w > 0$, gli iperboloidi ad una falda

$$\{(x,y,z) \,|\, F(x,y,z) = w\},$$

e si ottenga il campo vettoriale Y restringendo l'espressione di X appena trovata all'iperboloide associato alla scelta di $w = 1$.

Esercizio 13 *Si consideri il sistema di equazioni differenziali in* $\mathbb{R}^3$

$$\dot{x} = 2\,y\,z, \qquad \dot{y} = -3\,x\,z, \qquad \dot{z} = x\,y.$$

a. *Si calcolino gli equilibri del sistema, e si linearizzi il sistema nei punti di equilibrio* $P_1 = (0,0,1)$ *e* $P_2 = (0,1,0)$.
b. *Si dimostri che le funzioni* $F = x^2 + y^2 + z^2$ *e* $G = 2x^2 + 3y^2 + 5z^2$ *sono integrali primi del sistema.*
c. *Si riscriva il sistema usando il cambiamento di coordinate*

$$u = x, \quad v = y, \quad w = x^2 + y^2 + z^2 = F,$$

la cui inversa

$$\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2 + v^2 < w\} \times \mathbb{R}_v \times \mathbb{R}^+_w \to \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^+_z,$$
$$(u,v,w) \mapsto \left(u, v, \sqrt{w - u^2 - v^2}\right).$$

parametrizza, una volta fissata $w > 0$, *la calotta nord della sfera* $F = w$. *Si usi la conservazione di* w *per restringere il campo vettoriale al piano* u, v *con* $w = 1$ *e si usi quindi l'integrale* G *riscritto nelle coordinate* u, v *(con* $w = 1$*) per disegnare il ritratto in fase del sistema ridotto.*
d. *Riscrivere il sistema nelle coordinate* $u = x$ $v = z$, $w = x^2 + y^2 + z^2$, *la cui inversa*

$$\mathbb{R}_u \times \mathbb{R}_v \times \mathbb{R}^+_w \to \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^+_y \times \mathbb{R}_z, \quad (u,v,w) \to (u, \sqrt{w - u^2 - v^2}, v)$$

parametrizza, una volta fissata w, *la calotta est della sfera* $F = w$. *Si usi la conservazione di* w *per restringere il campo vettoriale al piano* u, v *con* $w = 1$ *e si usi quindi l'integrale* G *riscritto nelle coordinate* u, v *(con* $w = 1$*) per disegnare il ritratto in fase del sistema ridotto.*
e. *Riscrivere campo vettoriale ed integrale* G *nelle coordinate cilindriche* z, φ, F *definite da*

$$(z, \varphi, F) \to (\sqrt{F - z^2}\cos\varphi, \sqrt{F - z^2}\sin\varphi, z)$$

la cui inversa è

$$(x, y, z) \to (z, \arg(x,y), x^2 + y^2 + z^2).$$

f. *Riscrivere campo vettoriale ed integrale* G *nelle coordinate sferiche* ϑ, φ, F *definite da*

$$(\vartheta, \varphi, F) \to (\sqrt{F}\cos\vartheta\cos\varphi, \sqrt{F}\cos\vartheta\sin\varphi, \sqrt{F}\sin\varphi)$$

la cui inversa è

$$(x, y, z) \to \left(\arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \arg(x,y), x^2 + y^2 + z^2\right).$$

a. gli equilibri sono gli assi coordinati. La Jacobiana del campo vettoriale è

$$\begin{pmatrix} 0 & 2z & 2y \\ -3z & 0 & -3x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi le linearizzazioni agli equilibri P_1 e P_2 rispettivamente sono di matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I polinomi caratteristici sono per la prima matrice $x(x^2+6)$, che è un sistema degenere-centro con autovalori $0, \pm i\sqrt{6}$ ed è quindi indecidibile spettralmente e $x(x^2-2)$ per la seconda matrice, che è la matrice di un sistema degenere-sella con autovalori $0, \pm\sqrt{2}$ ed è quindi instabile.

b. Si dimostra con un semplice conto. Quindi si potrebbero disegnare le soluzioni intersecando le superfici di livello e si ottiene il disegno sulla sfera unitaria ben noto per le equazioni di Eulero.

c. Il campo vettoriale, nelle coordinate u, v, w diventa $\dot{u} = 2v\sqrt{w-u^2-v^2}$, $\dot{v} = -3u\sqrt{w-u^2-v^2}$, $\dot{w} = 0$. Vista la legge di conservazione, possiamo restringerci alle soluzioni con $w = 1$. Le equazioni in questa sottovarietà sono quindi quelle associate al campo vettoriale

$$Y = \sqrt{1-u^2-v^2}\begin{pmatrix} 2v \\ -3u \end{pmatrix}$$

che quindi, a meno di riparetrizzazione temporale, ha le soluzioni di un nodo.

Si può anche usare l'integrale G dopo averlo riscritto nelle coordinate u, v con $w = 1$. Si ha quindi che la funzione $G(u, v, 1) = -3u^2 - 2v^2 + 5$ è integrale del moto, e le sue curve di livello sono dei cerchi concentrici e si ha un centro (vedi figura di sinistra).

d. Il campo vettoriale, nelle coordinate u, v, w diventa $\dot{u} = 2v\sqrt{w-u^2-v^2}$, $\dot{v} = u\sqrt{w-u^2-v^2}$, $\dot{w} = 0$. Anche in questo caso le equazioni in questa sottovarietà sono quindi quelle associate al campo vettoriale

$$Y = \sqrt{1-u^2-v^2}\begin{pmatrix} 2v \\ u \end{pmatrix}$$

che sono, a meno di riparametrizzazione temporale, le soluzioni di una sella.

La legge di conservazione associata a G porge che, su $w = 1$, si conserva la quantità $3 - u^2 + 2v^2$. Le sue curve di livello sono delle iperboli.

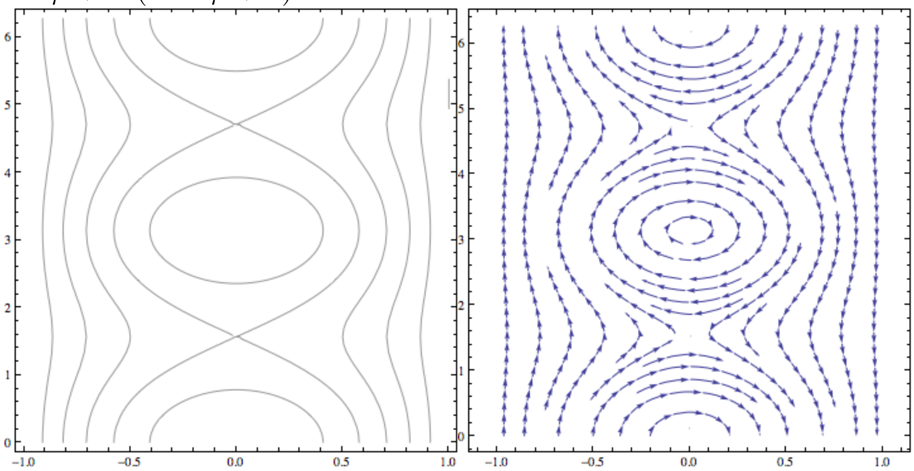
e. Si ottengono le equazioni

$$\dot{z} = (F - z^2)\cos\varphi\sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = -z(2 + \cos^2\varphi), \quad \dot{F} = 0.$$

Usando identità trigonometriche si ha che

$$G = 3F - F\cos^2\varphi + z^2(\cos^2\varphi + 2)$$

Se restingiamo alla sfera di raggio 1, le orbite sono le curve di livello di $-\cos^2\varphi + z^2(\cos^2\varphi + 2)$. Ritratto in fase e curve di livello sono



f. Si ottengono le equazioni

$$\dot{\vartheta} = \sqrt{F}\cos\varphi\sin\varphi\cos\vartheta, \quad \dot{\varphi} = -\sqrt{F}\sin\vartheta(2 + \cos^2\varphi), \quad \dot{F} = 0.$$

Usando identità trigonometriche si ha che

$$G = 5F - F\cos^2\vartheta(2 + \cos^2\varphi)$$

Se restingiamo alla sfera di raggio 1, le orbite sono le curve di livello di $\cos^2\vartheta(2 + \cos^2\varphi)$. Ritratto in fase e curve di livello sono simili a quelle disegnate sopra

Esercizio 14 *Si consideri il campo vettoriale*

$$X = \begin{pmatrix} xz \\ -yz \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

definito in $\mathbb{R}^2_{x,y} \times \mathbb{R}^>_z$.

a. *Si calcolino gli equilibri del sistema.*

b. *Si dimostri che la funzione* $W = x^2 + y^2 - z^2$ *è integrale del moto.*

c. *Si riscriva il sistema nelle coordinate* $u = x$ $v = y$, $w = x^2 + y^2 - z^2$, *la cui inversa*

$$\mathbb{R}_u \times \mathbb{R}_v \times \mathbb{R}_w \to \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z, \quad (u, v, w) \to (u, v, \sqrt{u^2 + v^2 - w})$$

parametrizza, una volta fissato $W < 0$, *una falda degli iperboloidi a due falde* $\{(x, y, z) \,|\, z > 0,\, F(x, y, z) = w\}$. *Si scriva il campo vettoriale in quelle coordinate e si ottenga il campo vettoriale* Y *restringendo* X *alla falda di iperboloide associato alla scelta di* $w = -1$. *Si disegni il ritratto in fase del campo vettoriale* Y.

d. *Si usino coordinate polari nel caso in cui* $W > 0$

a. Imponiamo $X = 0$. La prima equazione è $xz = 0$ quindi $x = 0$ oppure $z = 0$. Nel primo caso $yz = 0$ quindi $y = 0$ ed anche l'ultima è allora nulla. Nel secondo caso la seconda equazione è verificata e la terza ha per soluzioni $x = y$ od $x = -y$. Ci sono quindi 3 rette: l'asse z e le bisettrici nel piano x, y.

b. Basta fare un conto

c. Deriviamo le nuove coordinate $\dot{u} = \dot{x} = xz = u\sqrt{u^2 + v^2 - w}$, $\dot{v} = \dot{y} = -yz = v\sqrt{u^2 + v^2 - w}$. Ovviamente $\dot{w} = 0$. Se scegliamo $w = -1$ il campo vettoriale associato è

$$Y_{w=-1} = \sqrt{u^2 + v^2 + 1} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}.$$

Il ritratto in fase è quindi quello di una sella, con livelli che sono iperboli.

Potremmo anche scrivere esplicitamente le soluzioni, visto che le soluzioni del campo lineare sono $(e^t u_0, e^{-t} v_0)$. Per fare questo bisognerebbe riparametrizzare le soluzioni. Per questo dovremmo integrare $\dot{\tau} = \sqrt{e^{2\tau} u_0^2 + e^{-2\tau} v_0^2 + 1}$... buona fortuna, ci vogliono le funzioni ellittiche.

d. quando $W = w > 0$ allora le curve di livello non si parametrizzano bene con x, y, ma si deve usare z, ϑ. Si pone

$$\mathcal{C}^{-1} : (z, \vartheta, w) \to (\cos\vartheta\sqrt{w + z^2}, \sin\vartheta\sqrt{w + z^2}, z)$$

di inversa

$$\mathcal{C} : (x, y, z) \to (z, \arg(x, y), x^2 + y^2 - z^2).$$

Con questo cambiamento di coordinate

$$\begin{aligned}\dot{z} = x^2 - y^2 = \cos^2\vartheta(w + z^2) - \sin^2\vartheta(w + z^2) = \\ = (w + z^2)(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) = (w + z^2)\cos(2\vartheta),\end{aligned}$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{-y\dot{x} + x\dot{y}}{x^2 + y^2} = -2\frac{xyz}{x^2 + y^2} = -2\cos\vartheta\sin\vartheta = -\sin(2\vartheta).$$

Ovviamente $\dot{w} = 0$.

Esercizio 15 *Si consideri il campo vettoriale definito in* $\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{xz}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \dfrac{yz}{x^2 + y^2 + z^2} \\ -\dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} \end{pmatrix}$$

a. *Si calcolino gli equilibri del sistema.*
b. *Si dimostri che la funzione* $U = x^2 + y^2 + z^2$ *è integrale del moto.*
c. *Si riscriva il sistema nelle coordinate* $u = x$, $v = y$, $w = x^2 + y^2 + z^2$, *la cui inversa.*

$$\mathbb{R}_u \times \mathbb{R}_v \times \mathbb{R}_w^{>} \to \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^{>}, \quad (u, v, w) \to (u, v, \sqrt{w - u^2 - v^2})$$

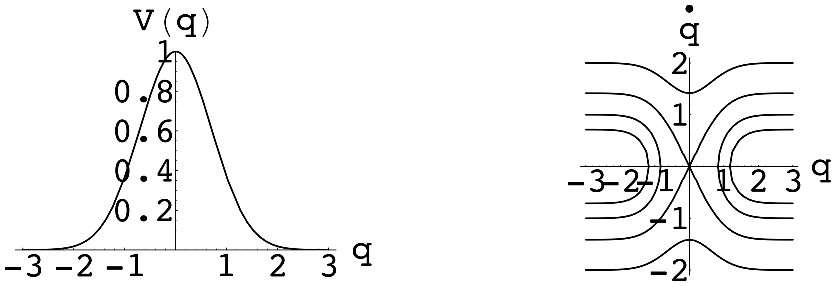
parametrizza, una volta fissato $w > 0$, *una calotta delle sfere di raggio* w. *Si riscriva il campo vettoriale* X *in quelle coordinate, e si ottenga il campo vettoriale* Y *restringendo* X *alla calotta sferica associata alla scelta di* $w = 1$.
d. *Si disegni il ritratto in fase del campo vettoriale* Y.

Esercizio 16 *Una particella di massa* m *è vincolata ad una retta* $\mathbb{R}_q$. *La particella è soggetta ad un campo di forze posizionali*

$$F(q) = 2qe^{-q^2}.$$

a. *Scrivere le equazioni del moto, e disegnare il ritratto in fase del sistema.*
b. *Introducendo $v = \dot{q}$ riscrivere le equazioni come un sistema del prim'ordine in forma normale ($\dot{q} = ...,\ \dot{v} = ...$). Linearizzare il campo vettoriale appena scritto all'unico punto di equilibrio e dire se è stabile o no.*
c. *Se il punto materiale transita per l'origine con velocità $v = 1$, arriva all'infinito? Se si, quanto tempo impiega a fuggire?*

a. Il potenziale associato a questa forza è $V = e^{-q^2}$, le equazioni del sistema sono $m\ddot{q} = 2qe^{-q^2}$. Il ritratto in fase di questo sistema è



b. Le equazioni riscritte al prim'ordine sono $\dot{q} = v$, $\dot{v} = \frac{2}{m}qe^{-q^2}$. Questo campo vettoriale ha un unico equilibrio che è l'origine; la linearizzazione del campo vettoriale nell'origine è associata alla matrice $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{m} & 0 \end{pmatrix}$, la quale ha autovalori $\pm\sqrt{\frac{2}{m}}$. L'equilibrio è quindi una sella, che è un equilibrio instabile.
c. Come si vede dal ritratto in fase, la traiettoria và all'infinito. Per calcolare il tempo di percorrenza si usa la formula dei periodi. La conservazione dell'energia per la particolare traiettoria scelta porge $\dot{q} = \pm\sqrt{1 + \frac{2}{m} - \frac{2}{m}e^{-q^2}}$. Quindi $T_\infty = \int_0^{T_\infty} dt = \int_0^\infty \frac{dq}{\sqrt{1+\frac{2}{m}-\frac{2}{m}e^{-q^2}}}$

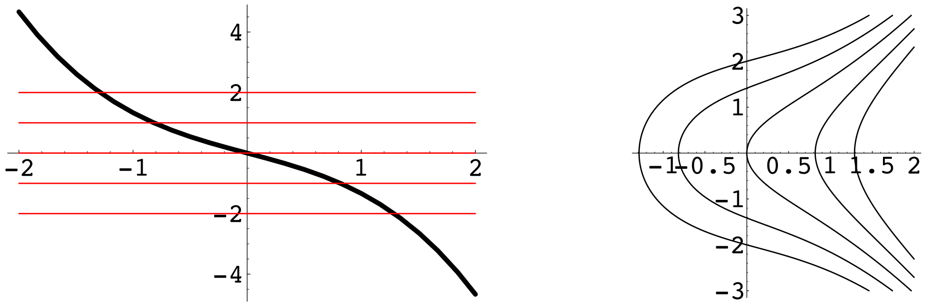
La funzione integranda non è infinitesima all'infinito, infatti tende a $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{m}}} > 0$, quindi l'integrale diverge ed il tempo impiegato è infinito.

Esercizio 17 *Si consideri l'equazione differenziale $\ddot{x} = -V_k'(x)$ con*

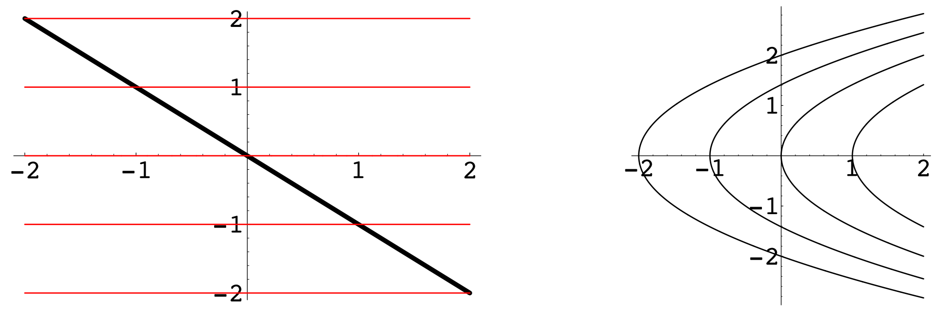
$$V_k(x) = \frac{k}{3}x^3 - x$$

dove k è una costante reale. Si tracci il ritratto in fase del sistema per $k = 1, 0, -1$.

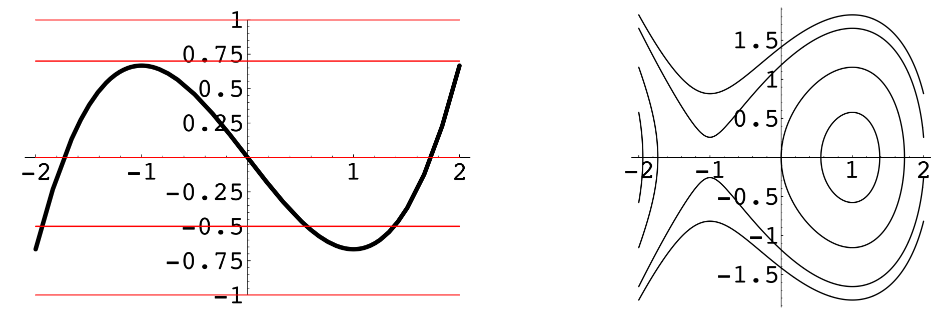
I ritratti in fase sono: per $k = 1$



per $k = 0$



per $k = -1$



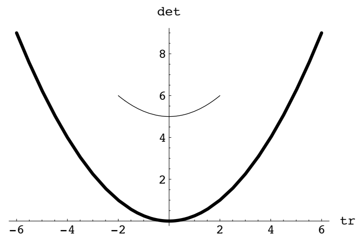
Esercizio 18 *Sia dato il sistema lineare* $\dot{x} = A_k\, x$, *con* $x \in \mathbb{R}^2$, k *un parametro in* $[-1, 1]$, *e*

$$A_k = \left(\begin{smallmatrix} k & 5 \\ -1 & k \end{smallmatrix} \right),$$

a. *Discutere qualitativamente (senza calcolare gli autovettori) i ritratti in fase del sistema ed il tipo di stabilità dell'origine al variare di* k *in* $[-1, 1]$.

b. *Fissato* $k = 0$, *dire se la soluzione* $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{5}t) \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \sin(\sqrt{5}t) \end{pmatrix}$ *è una soluzione dell'equazione differenziale. A quali dati iniziali soddisfa? È periodica, e se sì, quale è il periodo?*

a. La traccia della matrice è $2k$ mentre il determinante è $k^2 + 5$. Questo parametrizza nel diagramma traccia/determinante un arco che collega $(-2, 6)$ a $(2, 6)$ rimanendo sempre nella parte convessa delimitata dalla parabola $det = tr^2/4$.

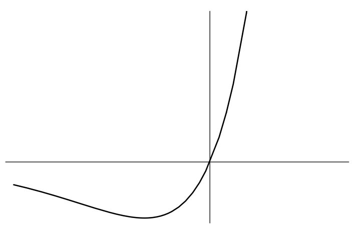
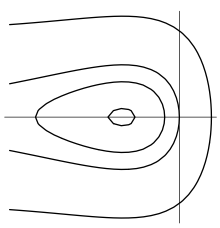


Segue che i ritratti in fase sono quelli di un fuoco instabile quando $0 < k < 1$, un centro quando $k = 0$ e di un fuoco stabile quando $-1 < k < 0$.

Si può anche scrivere il polinomio caratteristico, che è $x^2 - 2kx + 5 + k^2$, i quali zeri sono $k \pm i\sqrt{5}$: l'origine è quindi asintoticamente stabile per $-1 < k < 0$, solo stabile se $k = 0$, ed instabile per $0 < k < 1$.
b. Basta derivare rispetto al tempo per ottenere la curva $t \mapsto \begin{pmatrix} -\sqrt{5}\sin(\sqrt{5}t) \\ -\cos(\sqrt{5}t) \end{pmatrix}$, questa curva è $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{5}t) \\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}t) \end{pmatrix}$. La soluzione soddisfa ad $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è periodica di periodo $2\pi/\sqrt{5}$.

Esercizio 19 *L'equazione differenziale $\ddot{x} = -(x + 1)e^x$ descrive il moto di una particella P di massa unitaria vincolata ad una retta e soggetta ad una forza conservativa.*
a. *Disegnare il ritratto in fase evidenziando le traiettorie corrispondenti ai livelli di energia $-1/e$ e 0.*
b. *Dire per quali dati iniziali le soluzioni sono periodiche.*

a. Il potenziale è $V(x) = xe^x$, quindi il ritatto in fase è

il livello di energia $-1/e$ corrisponde al minimo del potenziale, ovvero al punto di equilibrio del ritratto in fase, il livello di energia 0 corrisponde all'unica orbita non limitata che asintoticamente tende all'asse delle x.

b. Le orbite periodiche sono tutte e sole quelle che corrispondono ai livelli di energia appartenenti a $[-1/e, 0)$. Ovvero tutte quelle i cui dati iniziali appartengono alla componente connessa contenente l'equilibrio e delimitata dalla prima traiettoria illimitata esclusa (quella di energia 0). In formula: $x_0 < 0$ e $\dot{x}_0 \in (-\sqrt{-2x_0 e^{x_0}}, \sqrt{-2x_0 e^{x_0}})$.

Esercizio 20 *Si consideri il sistema lineare $\dot{x} = Ax$ dove*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

a. *Si dica che tipo di sistema lineare si tratta.*
b. *Si disegni il ritratto in fase del sistema, indicando in modo accurato alcune delle traiettorie caratteristiche del sistema.*

a. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 5\lambda + 4$, le sue soluzioni sono $-4, -1$, si tratta quindi di nodo stabile.
b. Gli autovettori del sistema sono

$$v_{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \quad v_{-4} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right).$$

Segue che il ritratto in fase è