

Laurea I livello in Matematica
Fisica Matematica, mod. A (2012-2013)
Domande ed esercizi

prima settimana

Argomenti trattati

Dalle note *Primo sguardo ai sistemi dinamici*, di F. Fassò: Cap. 0, Cap. 1, Cap. 2 fino alla Sez. 2.4. inclusa.

Dagli appunti *Analisi 2* (Appunti del corso, versione finale del 13 Febbraio 2013), di R. Monti: Sez. 5.8 fuorché la Sottosez. 5.8.3

Domande di teoria

1. Che relazione passa tra un'equazione differenziale e un campo vettoriale?
2. Scrivere le soluzioni dell'oscillatore armonico e del repulsore armonico e tracciarne il ritratto in fase.
3. Quali sono le conseguenze dell'unicità delle soluzioni $t \rightarrow z(t, t_0, z_0)$ di una ODE?
4. Dire cosa è un'equazione differenziale del primo ordine.
5. Dire cosa sono le soluzioni e le orbite di un'equazione differenziale del primo ordine.
6. Definire cosa sono le soluzioni di equilibrio di un'equazione differenziale del primo ordine e come si caratterizzano.
7. Definire cos'è un campo vettoriale su un aperto di \mathbb{R}^n .
8. Dire cosa è un campo vettoriale completo. Si conoscono condizioni sufficienti per la completezza? Il campo vettoriale dell'equazione logistica è completo?

9. Come si costruisce il ritratto in fase del sistema $\dot{z} = X(z)$ per $z \in \mathbb{R}$? Cosa bisogna sapere per dimostrarlo?
10. Cosa è l'equazione logistica? Determinarne il flusso integrandola e tracciarne il ritratto in fase.
11. In cosa consiste l'*effetto Allee* in dinamica delle popolazioni? Si disegni il ritratto in fase del modello che ingloba tale effetto nell'equazione logistica.
12. Cosa è una configurazione di equilibrio per un sistema del secondo ordine? Cosa sono le soluzioni di equilibrio? Come si trovano?
13. Quali conseguenze ha il teorema di esistenza ed unicità sulle orbite di un'equazione differenziale?
14. Cosa è la linearizzazione di un'equazione differenziale ad un equilibrio?
15. Cosa si può dire di un punto \bar{z} dello spazio delle fasi se vi è una soluzione dell'equazione differenziale che ha tale punto come limite per t che tende a $+\infty$? Dimostrarlo. Vale lo stesso se t tende a $-\infty$?
16. Cosa significa che un'equazione differenziale del secondo ordine (in forma normale) è equivalente ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine? Quali sono i vantaggi di questa procedura?
17. Spiegare l'origine delle equazioni dell'oscillatore e del repulsore armonici via linearizzazione ad un equilibrio.
18. Ricostruire la trattazione del modello di logistico con prelievo $\dot{n} = k \left(1 - \frac{n}{n_\ell}\right) n - p$ e della variante che include l'effetto Allee.
19. Come si linearizza un'equazione del II ordine in un equilibrio? È vero che la linearizzazione è ancora un'equazione del II ordine?

Esercizi

1. saper fare tutti i ritratti in fase elementari visti a lezione.
2. Tracciare il ritratto in fase dell'equazione differenziale $\dot{z} = z^2 + k$ con $z \in \mathbb{R}$, ove k è un parametro reale, distinguendo i casi in cui $k < 0$, $k = 0$ e $k > 0$. In tutti i casi, confrontare il ritratto in fase vicino a ciascun equilibrio con quello della linearizzazione in quell'equilibrio.

3. Determinare gli equilibri del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - 2y + xy \\ \dot{y} &= 2x + y - y^2.\end{aligned}$$

e linearizzarlo in essi.

4. Determinare gli equilibri del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2(x - 1) + y + (x - 1)y \\ \dot{y} &= 1 - x + 2y + (x - 1)y^2.\end{aligned}$$

e linearizzarlo in essi.

5. Determinare gli equilibri del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + 2y + x^2 \\ \dot{y} &= -2x + y\end{aligned}$$

e linearizzarlo attorno all'origine.