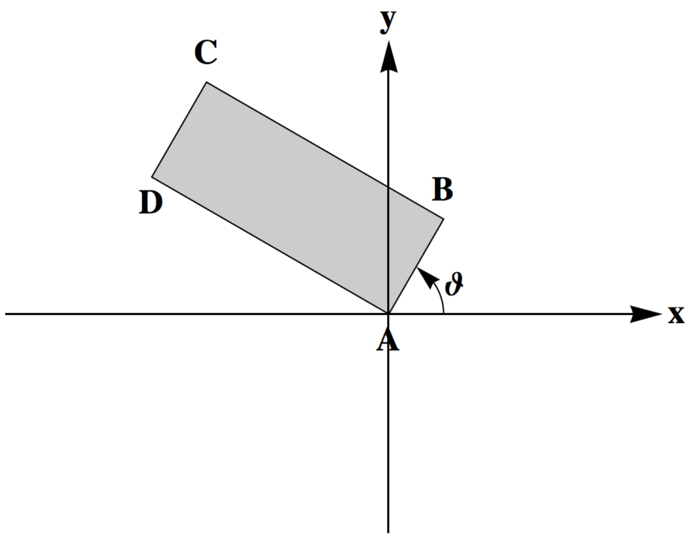
Esercizi svolti in classe

Andrea Giacobbe

7-8 Maggio 2014

Esercizio 1 *Nel piano Oxy è posta una lamina omogenea $ABCD$ di massa m e lati $|AB| = a$, $|BC| = b$ il cui vertice A è fissato in O.*
a. *Si scriva la matrice di inerzia della lamina relativa al riferimento inerziale.*
b. *Si calcoli l'energia cinetica del sistema associato ad un moto di rotazione attorno ad A.*
c. *Congelata la coordinata Lagrangiana ϑ, si calcoli l'energia cinetica del sistema associato ad un moto di rotazione attorno all'asse y di frequenza Ω.*



Svolgimento

a. Scriviamo la matrice di inerzia relativa ad un riferimento solidale al corpo. Scegliamo

$$e_1 = \frac{AB}{|AB|} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0), \quad e_2 = \frac{BC}{|BC|} = (-\sin\vartheta, \cos\vartheta, 0), \quad e_3 = e_z = (0, 0, 1).$$

(La scrittura di e_2 si fa o con la trigonometria, oppure pensando ad una variazione di ϑ, ovvero derivando rispetto a ϑ e poi regola della mano destra, oppure scegliendo prima $e_3 = e_z$ e poi $e_2 = e_z \wedge e_1$.)

In questo sistema di riferimento, la matrice di inerzia baricentrica è

$$\mathcal{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{mb^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{pmatrix}$$

Per scrivere lo stesso operatore nel riferimento e_x, e_y, e_z dobbiamo coniugare questa matrice con la matrice $(e_x\ e_y\ e_z)$, quindi ($c = \cos\vartheta$, $s = \sin\vartheta$)

$$\begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{mb^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{12}(c^2b^2+s^2a^2) & \frac{m}{12}cs(b^2-a^2) & 0 \\ \frac{m}{12}cs(b^2-a^2) & \frac{m}{12}(c^2a^2+s^2b^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{pmatrix}$$

b. Se ruota attorno ad A allora la sua velocità angolare è $\dot\vartheta e_z$, e quindi

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} I_A^{e_z} \dot\vartheta^2 &= \frac{1}{2}\left(I_G^{e_z} + m\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)\right)\dot\vartheta^2 = \\ &= \frac{1}{2} I_G^{e_z}\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)\dot\vartheta^2 = \\ &= \frac{1}{2}\frac{m}{3}(a^2+b^2)\dot\vartheta^2 \end{aligned}$$

La penultima espressione si può interpretare come la scrittura dell'energia cinetica utilizzando il teorema di Konig.

c. In questo caso, chiamando d la distanza tra l'asse delle y e l'asse parallela a questa passante per G si ha che (Steiner)

$$T = \frac{1}{2} I_A^{e_y}\Omega^2 = \frac{1}{2}(I_G^{e_y} + md^2)\Omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{12}(b^2s^2 + a^2c^2) + m\left(\frac{a}{2}c - \frac{b}{2}s\right)^2\right)\Omega^2$$

Anche in questo caso i due termini di questa espressione si possono interpretare usando il teorema di Konig, ma per scrivere la velocità del centro di massa G bisogna uscire dal piano ed ottenere che

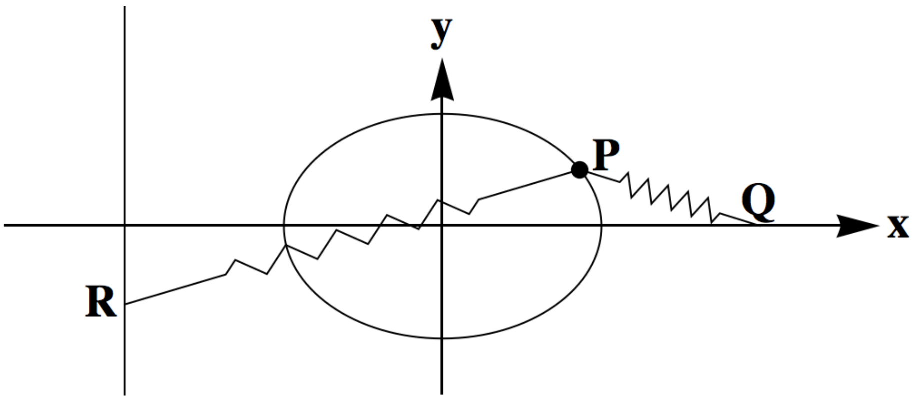
$$|v_G|^2 = \Omega^2\left(\frac{a}{2}c - \frac{b}{2}s\right)^2.$$

Questa espressione dell'energia cinetica, cambiata di segno, è l'energia potenziale centrifuga se si fosse svolto un esercizio nel sistema non-inerziale. $\square$

Esercizio 2 *In un sistema di riferimento inerziale Oxy, un punto materiale P di massa m è vincolato ad una guida ellittica di asse maggiore $\sqrt{2}\ell$ diretto lungo l'asse delle x e di asse minore ℓ lungo l'asse delle y (l'equazione della guida è quindi $x^2+2\,y^2=2\ell^2$). Al punto P sono attaccate due molle, entrambe di costante elastica k. La prima molla ha un capo attaccato al punto Q posto in $(2\sqrt{2}\ell,0)$, la seconda ha un capo attaccato al punto R posto in $(-2\sqrt{2}\ell,h)$ con h in $\mathbb{R}$ (osservate che sia ℓ che h hanno dimensione di mt, mentre k ha dimensione $\mathrm{kg}*\mathrm{sec}^{-2}$). Parametrizzando l'ellisse (e quindi le posizioni del punto P) attraverso la mappa*

$$\vartheta \to (\ell\sqrt{2}\cos\vartheta, \ell\sin\vartheta)$$

si consideri il sistema dipendente dal parametro h e:
a. *si determinino gli equilibri del sistema al variare di h;*
b. *si studi la loro stabilità;*
c. *si riassuma lo studio fatto in un diagramma di biforcazione con ℓ fissato e variando h.*



Svolgimento

a. Come suggerito nel testo, la posizione di P si parametrizza con $\vartheta \mapsto (\sqrt{2}\ell\cos\vartheta, \ell\sin\vartheta)$. Le forze attive in questo caso sono le due forze elastiche, quindi $F_P = k\,PQ + k\,PR$. Entrambe le forze sono conservative ed il potenziale a loro associato è

$$V = \frac{k}{2}\Big(|PQ|^2 + |PR|^2\Big).$$

Ricordando che

$$PQ = Q - P = (2\sqrt{2}\ell, 0) - (\sqrt{2}\ell\cos\vartheta, \ell\sin\vartheta),$$
$$PR = R - P = (-2\sqrt{2}\ell, h) - (\sqrt{2}\ell\cos\vartheta, \ell\sin\vartheta),$$

il potenziale riscritto come funzione del parametro lagrangiano è la funzione di ϑ

$$V(\vartheta) = \ell^2 \frac{k}{2}\left((\sqrt{2}\cos\vartheta + 2\sqrt{2})^2 + \sin^2\vartheta + (\sqrt{2}\cos\vartheta - 2\sqrt{2})^2 + \left(\sin\vartheta - \frac{h}{\ell}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{k}{2}\ell^2\left(2(2\cos^2\vartheta + 8) + 2\sin^2\vartheta - 2\frac{h}{\ell}\sin\vartheta + \frac{h^2}{\ell^2}\right)$$

$$\simeq k\ell^2\Big(\cos^2\vartheta - \frac{h}{\ell}\sin\vartheta\Big).$$

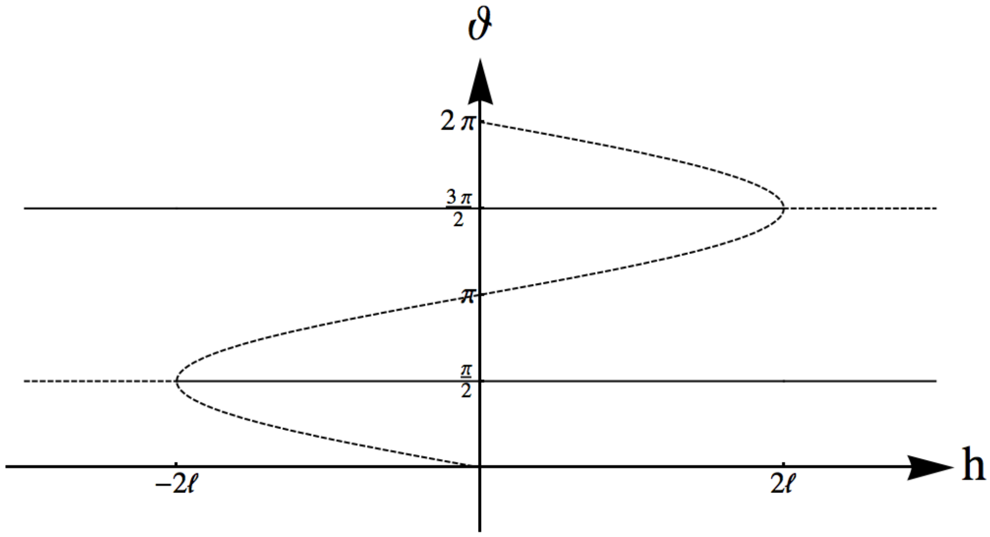
Per determinare gli equilibri, si studiano i punti critici del potenziale V. La derivata di V è

$$V' = -k\ell^2\cos\vartheta\left(2\sin\vartheta + \frac{h}{\ell}\right),$$

e quindi si annulla se e solo se $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi$, oppure quando h è in $(-2\ell, 2\ell)$ nei due $\vartheta_\pm$ tali che

$$\sin\vartheta_\pm = -\frac{h}{2\ell}. \tag{1}$$

Le due soluzioni tendono a $3\pi/2$ quando h tende a 2ℓ e tendono invece a $\pi/2$ quando h tende a -2ℓ e si può tracciare la loro dipendenza da h (ipotizzando ℓ fissato) usando l'equazione che le definisce, ovvero $h = -2\ell\sin\vartheta$. Si ha quindi



b. Per quanto riguarda la stabilità degli equilibri, vogliamo usare il teorema dell'Hessiana non degenere. La derivata seconda di V è

$$V''(\vartheta) = k\ell^2\sin\vartheta(2\sin\vartheta + h/\ell) - 2k\ell^2\cos^2\vartheta.$$

In $\pi/2$ la derivata vale $2k\ell^2 + hk\ell$, e quindi è positiva se e solo se $h > -2\ell$. Segue che la soluzione $\pi/2$ è stabile quando $h > -2\ell$ ed è instabile quando $h < -2\ell$.

In $3\pi/2$ la derivata seconda è $-(-2k\ell^2 + hk\ell)$ che ha la stessa positività di $2\ell - h$ e quindi è positiva se e solo se $h < 2\ell$. Segue che la soluzione $3\pi/2$ è stabile quando $h < 2\ell$ ed è instabile quando $h > 2\ell$.

La derivata seconda calcolata negli altri due equilibri è $-2k\ell^2 \cos^2 \vartheta_\pm$, ed è sempre minore di zero (diventa uguale nei casi degeneri in cui i due equilibri collassano su $\pi/2$ o $3\pi/2$). Segue che questi due equilibri sono sempre instabili. Questo spiega la tratteggiatura del diagramma di biforcazione sopra: la riga continua è riservata agli equilibri stabili, quella tratteggiata a quelli instabili.

Si osservi che da questo diagramma di biforcazione si deduce che se il sistema di trova molto vicino a $3\pi/2$ mentre h lentamente cresce allora, finché $h < 2\ell$, il sistema oscilla e rimane vicino a tale equilibrio (se c'è un po' di dissipazione, converge a tale equilibrio). Quando h diventa maggiore di 2ℓ allora, in modo catastrofico, il sistema si metterà ad oscillare attorno all'unico equilibrio stabile esistente, che si trova in $\pi/2$, e se c'è dissipazione convergerà asintoticamente a questo. $\square$

Esercizio 3 *Sia dato il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y \\ \dot{y} = 5x + y \end{cases}$$

a. *Determinare gli equilibri.*
b. *Determinare i parametri a, b, c in modo tale che la funzione $W = ax^2 + by^2 + cxy$ sia integrale del moto.*
c. *La funzione W appena trovata può essere usata per ottenere informazioni sulla stabilità dell'origine?*

SVOLGIMENTO

a. Solo l'origine è equilibrio.
b. La derivata di Lie della funzione W è $(5c - 2a)x^2 - 2(a - 5b)yx + (2b - c)y^2$. PErchè W sia integrale del moto bisogna annullare tutti i coefficienti di $L_X W$. Si ottiene che $a = 5c/2$, $b = c/2$. Da cui segue che, scelto $c = 2$

$$W = 5x^2 + y^2 + 2xy$$

Ovviamente tutti i multipli di W sono integrali primi.
c. Visto che la funzione W scelta ha minimo stretto in $(0, 0)$, come si vede calcolando gradiente e matrice Hessiana o come si controlla più semplicemente completando i quadrati. Infatti

$$5x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 + 4x^2 > 0$$

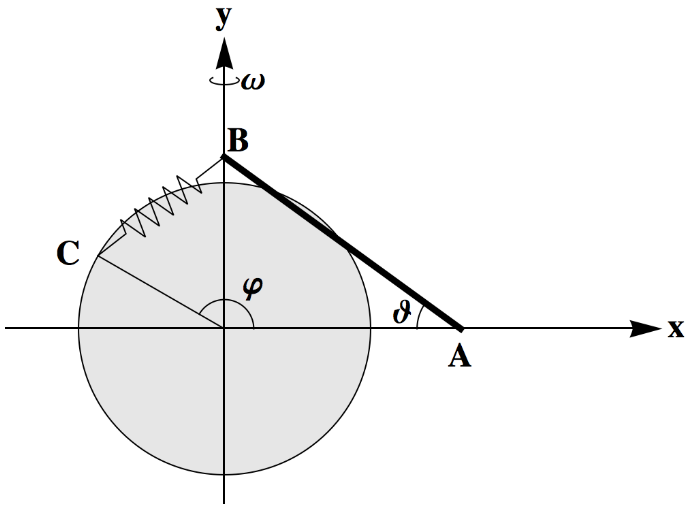
che è sempre positiva a meno che $(x, y) = (0, 0)$. Si ha quindi la stabilità semplice ma non quella asintotica. $\square$

Esercizio 4 *Nel piano Oxy è posto un disco omogeneo di massa M e raggio R il cui centro coincide con O. Un'asta AB di lunghezza ℓ e massa m ha estremo B vincolato a scorrere sull'asse delle y ed estremo A vincolato a scorrere sull'asse delle x. Al punto B dell'asta è attaccata una molla di costante elastica k il cui altro capo è fissato in C, un punto posto sulla circonferenza del disco. Il piano Oxy è posto in rotazione uniforme attorno all'asse delle y con velocità angolare Ω. Chiamando ϑ l'angolo orientato da $-e_x$ a e_{AB} e φ l'angolo orientato da e_x ad e_{OC}*

a. *si determinino gli equilibri del sistema;*

b. *assumendo che $\Omega^2 = 3k/m$ ed $R = \sqrt{2}\,\ell$, si studi la loro stabilità;*

c. *nelle ipotesi fatte al punto* **b** *si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad uno degli equilibri stabili.*



SVOLGIMENTO

a. I punti caratteristici del problema sono

$$OA = \ell(\cos\vartheta, 0), \quad OB = \ell(0, \sin\vartheta), \quad OC = R(\cos\varphi, \sin\varphi).$$

I potenziali che giocano un ruolo in questo problema sono il potenziale elastico

$$V_{BC}^k = \frac{k}{2}|R(\cos\varphi, \sin\varphi) - \ell(0, \sin\vartheta)|^2 \simeq \frac{k}{2}(\ell^2 \sin^2\vartheta - 2R\ell \sin\varphi \sin\vartheta)$$

ed il potenziale centrifugo dell'asta per il quale bisogna calcolare $I_B^{e_y}$, il momento di inerzia dell'asta relativo ad una rotazione attorno all'asse delle y. Si ha che $I_B^{e_y} = e_y \cdot \mathcal{I}_B e_y = m\ell^2/3 \cos^2\vartheta$. Infatti nel sistema di riferimento solidale $e_1 = e_{BA} = (\cos\vartheta, -\sin\vartheta, 0)$, $e_2 = (\sin\vartheta, \cos\vartheta, 0)$, $e_3 = e_z$ l'operatore di inerzia $\mathcal{I}_B$ è associato alla matrice

$$m\frac{\ell^2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre il versore $e_y = -\sin\vartheta\, e_1 + \cos\vartheta\, e_2$. Ovviamente si poteva parametrizzare l'asta usando $s : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$, $s \mapsto ((\ell - s)\cos\vartheta, s\sin\vartheta)$ (proprio perché voglio che $s = 0$ vada in A ed $s = \ell$ vada in B) ed integrare

$$\frac{m}{\ell}\int_0^\ell ((\ell - s)\cos\vartheta)^2 ds$$

Si ha quindi che

$$V_{AB}^{cf} = -\frac{1}{2}m\frac{\ell^2}{3}\cos^2\vartheta\Omega^2$$

Ovviamente, il potenziale centrifugo del disco è indipendente dalle variabili, mentre le sollecitazioni di Coriolis sono annullate dalle reazioni vincolari. Segue che

$$\begin{aligned} V = \frac{k}{2}(\ell^2\sin^2\vartheta - 2R\ell\sin\varphi\sin\vartheta) - \frac{1}{6}\Omega^2 m\ell^2\cos^2\vartheta \simeq \\ \simeq \frac{k}{2}(\ell^2\sin^2\vartheta - 2R\ell\sin\varphi\sin\vartheta) + \frac{1}{2}\Omega^2 m\ell^2\sin^2\vartheta = \\ = \ell^2\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{6}\Omega^2 m\right)\sin^2\vartheta - kR\ell\sin\varphi\sin\vartheta \end{aligned}$$

Per semplicità, denotiamo con $a = \ell^2\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{6}\Omega^2 m\right)$ e con $b = kR\ell$, il gradiente di V diventa

$$\nabla V = \begin{pmatrix} (2a\sin\vartheta - b\sin\varphi)\cos\vartheta \\ -b\cos\varphi\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

e quindi si annulla:

1. quando $\varphi = \pi/2$ allora o $\vartheta = \pi/2, 3\pi/2$ (2 soluzioni) oppure $\sin\vartheta = b/(2a)$ (due od una o nessuna soluzione)

2. quando $\varphi = \pi/2$ allora o $\vartheta = \pi/2, 3\pi/2$ (2 soluzioni) oppure $\sin\vartheta = -b/(2a)$ (due od una o nessuna soluzione)

3. quando $\vartheta = 0, \pi$ allora $\varphi = 0, \pi$ (4 soluzioni)

b. Con l'ipotesi su Ω ed R si ha che $a = k\ell^2$ e $b = \sqrt{2}k\ell^2$, e quindi gli equilibri misteriosi diventano nel primo caso $\vartheta_\pm = \pi/4, 3\pi/4$, nel secondo caso $\vartheta_\pm = -\pi/4, -3\pi/4$.

La matrice Hessiana di V è

$$HV = k\ell^2\begin{pmatrix} \sin\varphi\sin\vartheta + 2 - 4\sin^2\vartheta & -\cos\varphi\cos\vartheta \\ -\cos\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

Calcolandola negli equilibri in cui $\varphi = \pi/2$ si ha

$$HV(\pi/2, \vartheta) = k\ell^2\begin{pmatrix} \sin\vartheta + 2 - 4\sin^2\vartheta & 0 \\ 0 & \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

che, nei quattro casi, diventa

$$HV\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=k\ell^2\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),HV\left(\frac{\pi}{2},3\frac{\pi}{2}\right)=k\ell^2\left(\begin{smallmatrix}-3&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right),HV\left(\frac{\pi}{2},\vartheta_\pm\right)=k\ell^2\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Gli ultimi due equilibri sono gli unici stabili. Calcolandola negli equilibri in cui $\varphi=3\pi/2$ si ha

$$HV(\pi/2,\vartheta)=k\ell^2\begin{pmatrix}-\sin\vartheta+2-4\sin^2\vartheta&0\\0&\sin\vartheta\end{pmatrix}$$

che, nei quattro casi, diventa

$$HV\left(3\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=k\ell^2\left(\begin{smallmatrix}-3&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right),HV\left(3\frac{\pi}{2},3\frac{\pi}{2}\right)=k\ell^2\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),HV\left(3\frac{\pi}{2},\vartheta_\pm\right)=k\ell^2\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

e si ripropone la stessa situazione. Negli ultimi quattro casi si ha

$$k\ell^2\left(\begin{smallmatrix}2&-1\\-1&0\end{smallmatrix}\right),\quad k\ell^2\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right),\quad k\ell^2\left(\begin{smallmatrix}2&1\\1&0\end{smallmatrix}\right),\quad k\ell^2\left(\begin{smallmatrix}2&-1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$$

che sono tutti e quattro instabili, visto che queste matrici hanno determinante negativo.

c. Per completare il calcolo abbiamo bisogno della matrice cinetica, che in questo caso sarà diagonale. Infatti l'energia cinetica del disco è

$$T_{Disco}=\frac{1}{2}I_O\dot\varphi^2=\frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot\varphi^2=\frac{1}{2}M\ell^2\dot\varphi^2$$

mentre l'energia cinetica dell'asta è (Konig)

$$T_{asta}=\frac{1}{2}m|v_G|^2+\frac{1}{2}I_G\dot\vartheta^2.$$

Siccome $OG=OA+AG=\ell(\cos\vartheta,0)+\frac{\ell}{2}(-\cos\vartheta,\sin\vartheta)$ si ha che $v_G=\frac{1}{2}\dot\vartheta\ell(-\sin\vartheta,\cos\vartheta)$, si ha che $|v_G|^2=\dot\vartheta^2\ell^2/4$, mentre $I_G=m\ell^2/12$, da cui segue che

$$T_{asta}=\frac{1}{8}m\dot\vartheta^2\ell^2+\frac{1}{24}m\ell^2\dot\vartheta^2=\frac{1}{6}m\ell^2\dot\vartheta^2$$

La matrice associata a questa energia cinetica è

$$A=\ell^2\begin{pmatrix}\frac{1}{3}m&0\\0&M\end{pmatrix}$$

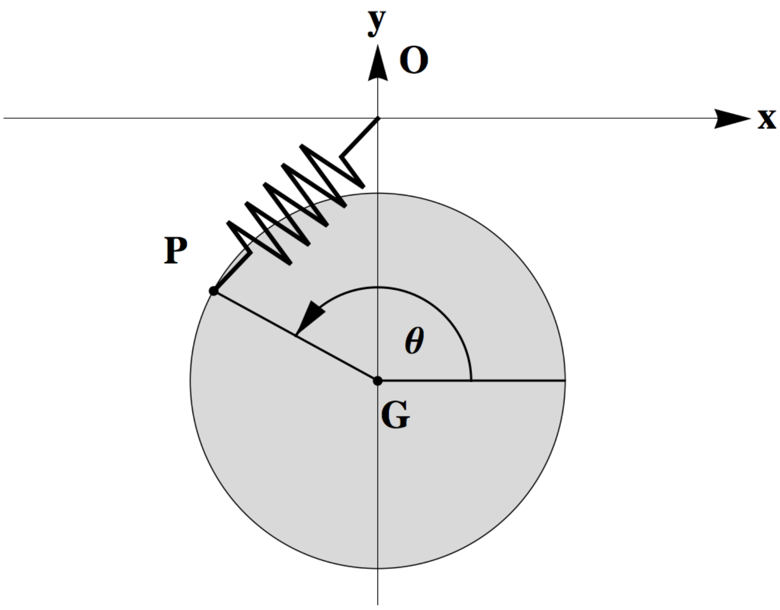
Siccome tutto è diagonale le frequenze delle piccole oscillazioni sono $\omega^2=\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{k}{m},\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{k}{M}$ □

Esercizio 5 *In un sistema di riferimento Oxy, con y verticale ascendente, un disco omogeneo di massa m e raggio R ha centro vincolato all'asse delle y. Una molla di costante elastica k è fissata ad un punto P del bordo del disco. L'altro capo della molla è attaccato all'origine del sistema di riferimento. Sul sistema agisce la gravità. Si scelgano come coordinate Lagrangiane y, la coordinata del centro di massa G, e ϑ, l'angolo tra il segmento GP e l'asse delle x (vedi figura).*

a. *Si scriva la Lagrangiana del sistema (il momento di inerzia di un disco è $I_G = \frac{m}{2}R^2$).*

b. *Si determinino tutti gli equilibri e si studi la stabilità solo degli equilibri con $y \neq 0$.*

c. *Assumendo che $k = 2\frac{mg}{R}$, si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni all'equilibrio che è stabile per qualsiasi scelta dei parametri.*



Svolgimento

a. I punti e gli atti di moto rilevanti per il sistema sono

$$OP = (R\cos\vartheta, y + R\sin\vartheta), \qquad OG = (0, y), \qquad \dot{OG} = (0, \dot{y}).$$

L'energia cinetica del sistema è $T = \frac{1}{2}m|v_G|^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$. In questo caso il primo termine diventa semplicemente $\frac{1}{2}m\dot{y}^2$, mentre la velocità angolare è $\dot{\vartheta}e_3$ e quindi il secondo termine è $\frac{1}{2}\frac{m}{2}R^2\dot{\vartheta}^2$. Quindi

$$\boxed{T(y, \vartheta, \dot{y}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}m\Big(\dot{y}^2 + \frac{R^2}{2}\dot{\vartheta}^2\Big)}$$

I potenziali in gioco sono quello gravitazionale e quello della molla. $V = V_g + V_k = mgy_G + \frac{k}{2}|OP|^2 = mgy + \frac{k}{2}\Big((R\cos\vartheta)^2 + (y + R\sin\vartheta)^2\Big)$. Un conto, a meno di costante, porge

$$\boxed{V(x, y, \vartheta) = mgy + \tfrac{k}{2}(y^2 + 2Ry\sin\vartheta)}$$

La Lagrangiana è $L = T - V$.

b. Per determinare gli equilibri bisogna studiare il gradiente del potenziale

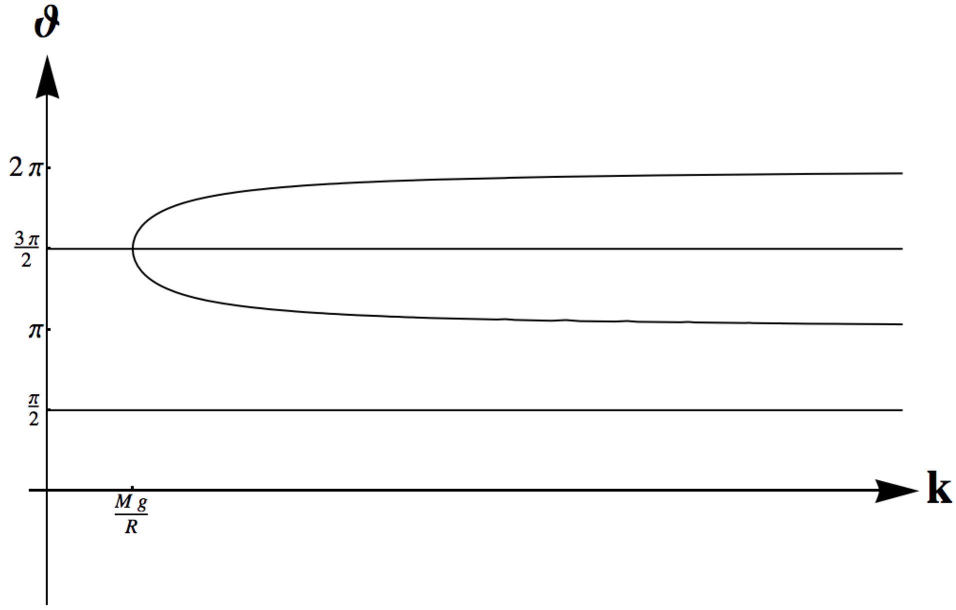
$$\nabla V = \begin{pmatrix} mg+ky+kR\sin\vartheta \\ kRy\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

La seconda equazione porge o la soluzione $\vartheta = \pm\frac{\pi}{2}$ oppure $y = 0$.

Nel secondo caso si ha che $\sin\vartheta = -\frac{mg}{kR}$, che porge due soluzioni, $-\frac{\pi}{2} \pm \bar{\vartheta}$ se $\frac{mg}{kR} < 1$, una soluzione $\frac{\pi}{2}$ se $\frac{mg}{kR} = 1$ e nessuna se $\frac{mg}{kR} > 1$.

Nel primo caso invece si ha che $y = -\frac{mg}{k} \mp R$. Oltre ai due eventuali equilibri con $y = 0$ si hanno gli equilibri $(-\frac{mg}{k} - R, \frac{\pi}{2})$ e $(-\frac{mg}{k} + R, -\frac{\pi}{2})$.

Si potrebbe disegnare un diagramma di biforcazione usando k come parametro. La coordinata y dell'equilibrio non è riportata in questo diagramma, ma sappiamo che la curva ha come coordinata y sempre zero mentre le due righe orizzontali hanno come coordinata y rispettivamente $-Mg/k + R$ quando $\vartheta = 3\pi/2$ ed $-Mg/k - R$ quando $\vartheta = \pi/2$.



Per studiare la stabilità degli equilibri usiamo il teorema della Hessiana non degenere. La matrice Hessiana di V è

$$HV = \begin{pmatrix} k & kR\cos\vartheta \\ kR\cos\vartheta & -kRy\sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

Calcolata negli equilibri con $y \neq 0$ si ha

$$HV(-\frac{mg}{k} - R, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & kR(\frac{mg}{k}+R) \end{pmatrix}.$$

che è definita positiva, quindi l'equilibrio $(-\frac{mg}{k} - R, \frac{\pi}{2})$ $\boxed{\text{è stabile}}$, e

$$HV(-\frac{mg}{k} + R, -\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & kR(-\frac{mg}{k}+R) \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha un autovalore negativo se e solo se $R - \frac{mg}{k} < 0$, ovvero quando $1 < \frac{mg}{kR}$ allora l'equilibrio $\boxed{(-\frac{mg}{k} + R, -\frac{\pi}{2}) \text{ è instabile}}$. Nel caso invece in cui $1 > \frac{mg}{kR}$ allora l'equilibrio $\boxed{(-\frac{mg}{k} + R, -\frac{\pi}{2}) \text{ è stabile}}$.

c. L'equilibrio che è sempre stabile indipendentemente dai parametri è $(-\frac{mg}{k} - R, \frac{\pi}{2})$. Assumendo che $k = 2\frac{mg}{R}$ si ha che la matrice Hessiana di V all'equilibrio diventa

$$HessV = \begin{pmatrix} 2\frac{mg}{R} & 0 \\ 0 & 3mgR \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico da calcolare è

$$\det\left[\begin{pmatrix} 2\frac{mg}{R} & 0 \\ 0 & 3mgR \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}\right]$$

Le matrici sono a blocchi e porgono $\omega = \sqrt{2\frac{g}{R}}$ e $\omega = \sqrt{6\frac{g}{R}}$. $\square$