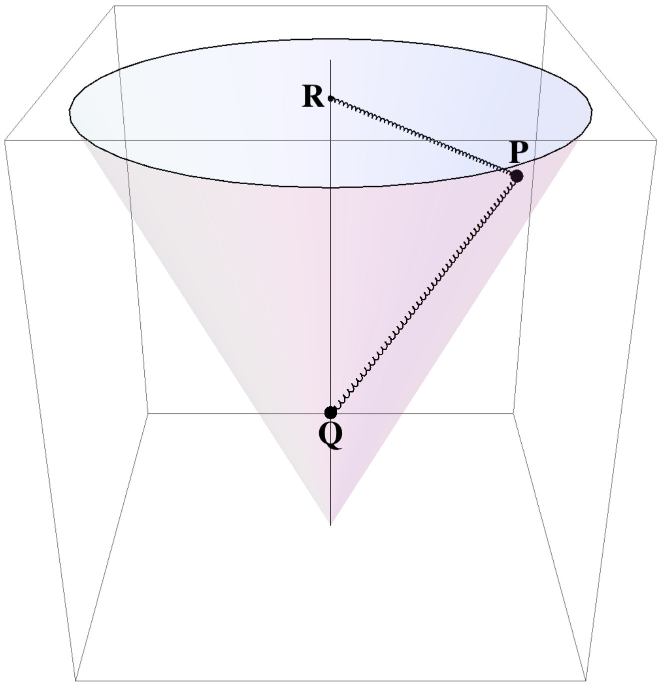
Esercizio 11 *Siano dati due punti materiali P e Q di massa m vincolati al cono di equazione $z^2 = x^2 + y^2$. Una molla di costante elastica k collega i due punti. Un'altra molla, di costante elastica uguale, collega il punto P al punto fisso $R = (0, 0, 5h)$. Sul sistema* **non** *agisce la gravità. Sapendo che le posizioni di P e Q si possono parametrizzare usando coordinate cilindriche*



$$OP(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, r),$$

$$OQ(s, \vartheta) = (s\cos\vartheta, s\sin\vartheta, s).$$

a. *Si scriva la Lagrangiana del sistema.*
b. *Cambiando le coordinate $\Phi = \varphi - \vartheta$, $\Theta = \varphi + \vartheta$, si riscriva la Lagrangiana.*
c. *Si riduca alla Routh la Lagrangiana così ottenuta.*
d. *Assumendo che la quantità conservata sia nulla ($c = 0$), si studino le frequenze di piccole oscillazioni del sistema ridotto. Nel determinare le configurazioni di equilibrio si escluda $r = 0$ ed $s = 0$, che sono singolarità del nostro sistema di coordinate.*

Svolgimento

a. Il potenziale delle forze attive è la somma di due potenziali $V = V_k^{PQ} + V_k^{PR} = \frac{k}{2}|PQ|^2 + \frac{k}{2}|PR|^2$.

$$|PQ|^2 = |(r\cos\varphi - s\cos\vartheta, r\sin\varphi - s\sin\vartheta, r - s)|^2 = 2r^2 + 2s^2 - 2rs(1 + \cos(\vartheta - \varphi)),$$

$$|PR|^2 = 2r^2 - 10rh + 25h^2.$$

Segue che il potenziale associato alle forze attive è

$$V(r, s, \vartheta, \varphi) = k\Big(2r^2 + s^2 - rs(1 + \cos(\vartheta - \varphi)) - 5rh\Big)$$

L'energia cinetica è

$$T(r, s, \vartheta, \varphi, \dot r, \dot s, \dot\vartheta, \dot\varphi) = \frac{1}{2}m\Big(2\dot r^2 + 2\dot s^2 + r^2\dot\varphi^2 + s^2\dot\vartheta^2\Big).$$

La Lagrangiana è $L = T - V$.

b. Cambiando coordinate il potenziale diventa $V(r,s,\Phi,\Theta) = k\Big(2r^2+s^2-rs(1+\cos\Phi)-5rh\Big)$ mentre l'energia cinetica diventa $T(r,s,\Phi,\Theta,\dot r,\dot s,\dot\Phi,\dot\Theta) = \frac{1}{2}m\Big(2\dot r^2+2\dot s^2+\frac{r^2+s^2}{4}\dot\Phi^2+\frac{r^2+s^2}{4}\dot\Theta^2+\frac{r^2-s^2}{2}\dot\Theta\dot\Phi\Big)$. Di nuovo $L' = T-V$.

c. La nuova Lagrangiana ha coordinata ciclica Θ. Si ha quindi la legge di conservazione $P_\Theta(r,s,\Phi,\dot r,\dot s,\dot\Phi,\dot\Theta) = m\Big(\frac{r^2+s^2}{4}\dot\Theta+\frac{r^2-s^2}{4}\dot\Phi\Big) \equiv c$. Questa legge porge

$$\dot\Theta = \frac{4c}{m(r^2+s^2)} + \frac{s^2-r^2}{r^2+s^2}\dot\Phi.$$

Riscriviamo la Lagrangiana esponendo i termini quadratici in $\dot\Theta$, quelli lineari in $\dot\Theta$ e quelli indipendenti da $\dot\Theta$. Si ha

$$L' = \left(\frac{1}{2}m\frac{r^2+s^2}{4}\dot\Theta^2\right) + \left(\frac{1}{2}m\frac{r^2-s^2}{2}\dot\Theta\dot\Phi\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{2}m\Big(2\dot r^2+2\dot s^2+\frac{r^2+s^2}{4}\dot\Phi^2\Big) - k\Big(2r^2+s^2-rs(1+\cos\Phi)-5rh\Big)\right)$$

La Lagrangiana ridotta è

$$L^R_c = \frac{1}{2}m\Big(2\dot r^2+2\dot s^2+\frac{r^2s^2}{r^2+s^2}\dot\Phi^2\Big) - c\,\frac{s^2-r^2}{r^2+s^2}\,\dot\Phi - 2\frac{c^2}{m(r^2+s^2)} - k\Big(2r^2+s^2-rs(1+\cos\Phi)-5rh\Big)$$

d. Supponendo che $c=0$ si ha la Lagrangiana

$$L^R_0 = \frac{1}{2}m\Big(2\dot r^2+2\dot s^2+\frac{r^2s^2}{r^2+s^2}\dot\Phi^2\Big) - k\Big(2r^2+s^2-rs(1+\cos\Phi)-5rh\Big).$$

Il potenziale ha gradiente

$$\nabla V = k\begin{pmatrix} 4r-s(1+\cos\Phi)-5h \\ 2s-r(1+\cos\Phi) \\ rs\sin\Phi \end{pmatrix}.$$

Dall'ultima segue che $\Phi = 0$ o π, dalla seconda quindi $\Phi=0$ ed $s=r$ (o $\Phi=\pi$ ed $s=0$ che buttiamo via) ed infine $r=\frac{5}{2}h$. La matrice Hessiana di V è

$$k\begin{pmatrix} 4 & -1-\cos\Phi & s\sin\Phi \\ -1-\cos\Phi & 2 & r\sin\Phi \\ s\sin\Phi & r\sin\Phi & rs\cos\Phi \end{pmatrix}.$$

Calcolata nell'equilibrio stabile $\Phi=0$, $r=s=\frac{5}{2}h$ (l'altro equilibrio è instabile), si ha

$$k\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{4}h^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice cinetica è invece

$$A = \begin{pmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{25}{8}h^2 \end{pmatrix}.$$

Le frequenze di piccole oscillazioni si calcolano risolvendo

$$0 = \det\left[k\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{4}h^2 \end{pmatrix} - m\lambda\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{8}h^2 \end{pmatrix}\right]$$

e porgono $\omega = \sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\omega = \sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}$. $\square$