**Esercizio 12** *Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine definita mediante un campo vettoriale nel piano* $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \dot{x} &=& -a \sin y \\ \\ \dot{y} &=& -\frac{a}{x} \cos y + bx \end{cases} \qquad\qquad a, b > 0$$

*Si determini l'equilibrio più vicino all'origine di* $\mathbb{R}^2$ *e se studi la stabilità usando una delle seguenti funzioni candidate Liapunov:*

$$W_1(x,y) = \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}}\Big)^2 - \frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \cos y + \frac{2}{3}, \qquad W_2(x,y) = \frac{1}{3}\Big(\frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}}\Big)^3 - \frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \cos y + \frac{2}{3}.$$

Svolgimento

L'equilibrio è $(x_E, y_E) = \left(\sqrt{\frac{a}{b}}, 0\right)$ e la funzione è la $W_2(x,y)$. Infatti

$$\nabla W_2(x,y) = \left(\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \cos y,\ \frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \sin y\right) \Rightarrow \nabla W_2 \left(\sqrt{\frac{a}{b}}, 0\right) = (0,0).$$

D'altro canto

$$\nabla^2 W_2 = \begin{pmatrix} 2\frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}} & \frac{\sin y}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \\ \frac{\sin y}{\sqrt{\frac{a}{b}}} & \frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \cos y \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 W_2 \left(\sqrt{\frac{a}{b}}, 0\right) = \begin{pmatrix} \frac{2b}{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Essendo l'Hessiana definita si ha positiva si ha che la funzione $W_2$ ha minimo stretto nell'equilibrio. Infine si verifica che $W_2$ è un integrale primo, infatti

$$L_X W_2 = \Big(\big(\frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}}\big)^2 \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \cos y\Big)(-a \sin x) + \Big(\frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \sin y\Big)(-\frac{a}{x} \cos y + bx) = 0.$$

$\square$