Esercizio 144 *In un sistema di riferimento inerziale Oxy, un punto materiale P di massa m è vincolato ad una guida ellittica di asse maggiore $\sqrt{2}\ell$ diretto lungo l'asse delle x e di asse minore ℓ lungo l'asse delle y (l'equazione della guida è quindi $x^2+2\,y^2=2\ell^2$). Al punto P sono attaccate due molle, entrambe di costante elastica k. La prima molla ha un capo attaccato al punto Q posto in $(2\sqrt{2}\ell,0)$, la seconda ha un capo attaccato al punto R posto in $(-2\sqrt{2}\ell,h)$ con h in $\mathbb{R}$ (osservate che sia ℓ che h hanno dimensione di* mt*, mentre k ha dimensione* $\mathrm{kg}*\mathrm{sec}^{-2}$*). Parametrizzando l'ellisse (e quindi le posizioni del punto P) attraverso la mappa*

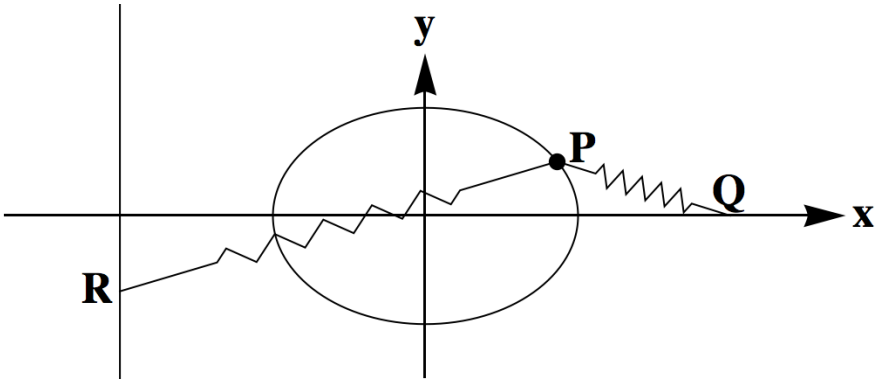
$$\vartheta \to (\ell\sqrt{2}\cos\vartheta, \ell\sin\vartheta)$$

si consideri quindi il sistema dipendente dal parametro h e:

a. *si determinino gli equilibri del sistema al variare di h;*

b. *si studi la loro stabilità;*

c. *si riassuma lo studio fatto in un diagramma di biforcazione.*



Svolgimento

a. Come suggerito nel testo, la posizione di P si parametrizza con $\vartheta \mapsto (\sqrt{2}\ell\cos\vartheta, \ell\sin\vartheta)$. Le forze attive in questo caso sono le due forze elastiche, quindi $F_P = k\,PQ + k\,PR$. Entrambe le forze sono conservative ed il potenziale a loro associato è

$$V = \frac{k}{2}\Big(|PQ|^2 + |PR|^2\Big).$$

Il potenziale riscritto come funzione del parametro lagrangiano è la funzione di ϑ

$$\begin{aligned} V(\vartheta) = \ell^2\frac{k}{2}\left((\sqrt{2}\cos\vartheta + 2\sqrt{2})^2 + \sin^2\vartheta + (\sqrt{2}\cos\vartheta - 2\sqrt{2})^2 + \left(\sin\vartheta - \frac{h}{\ell}\right)^2\right) = \\ = \frac{k}{2}\ell^2\left(2(2\cos^2\vartheta + 8) + 2\sin^2\vartheta - 2\frac{h}{\ell}\sin\vartheta + \frac{h^2}{\ell^2}\right) \\ \simeq k\ell^2\Big(\cos^2\vartheta - \frac{h}{\ell}\sin\vartheta\Big) \end{aligned}$$

Per determinare gli equilibri, si studiano i punti critici del potenziale V. La derivata di V è $-k\ell^2 \cos\vartheta(2\sin\vartheta + h/\ell)$, e quindi si annulla se e solo se $\vartheta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$, oppure quando h è in $(-2\ell, 2\ell)$ nei due $\vartheta_\pm$ tali che

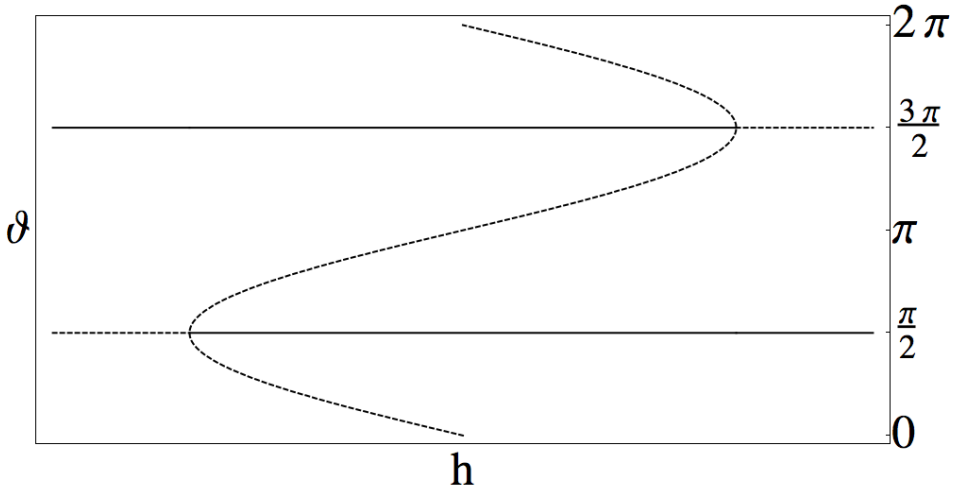
$$\sin\vartheta_\pm = -\frac{h}{2\ell}. \tag{2}$$

Le due soluzioni tendono a $3\pi/2$ quando h tende a 2ℓ e tendono invece a $\pi/2$ quando h tende a -2ℓ e si può tracciare la loro dipendenza da h (ipotizzando ℓ fissato) usando l'equazione che le definisce.

b. Per quanto riguarda la stabilità degli equilibri, vogliamo usare il teorema dell'Hessiana non degenere. La derivata seconda di V è $k\ell^2 \sin\vartheta(2\sin\vartheta + h/\ell) - 2k\ell^2\cos^2\vartheta$. In $\pi/2$ questa vale $2k\ell^2 + hk\ell$, e quindi è positiva se e solo se $h > -2\ell$. Segue che la soluzione $\pi/2$ è stabile quando $h > -2\ell$ ed è instabile quando $h < -2\ell$.

In $3\pi/2$ la derivata seconda è $-(-2k\ell^2 + hk\ell)$ che ha la stessa positività di $2\ell - h$ e quindi è positiva se e solo se $h < 2\ell$. Segue che la soluzione $3\pi/2$ è stabile quando $h < 2\ell$ ed è instabile quando $h > 2\ell$.

La derivata seconda calcolata negli altri due equilibri è $-2k\ell^2\cos^2\vartheta_\pm$, ed è sempre minore (od uguale) a zero. Segue che questi due equilibri sono sempre instabili. Il diagramma di biforcazione è quindi



Si osservi che da questo diagramma di biforcazione si deduce che se il sistema di trova molto vicino a $\frac{3}{2}\pi$ mentre h lentamente cresce allora, finché $h < 2\ell$, il sistema oscilla e rimane vicino a tale equilibrio. Quando h diventa maggiore di 2ℓ allora, in modo catastrofico, il sistema si metterà ad oscillare attorno all'unico equilibrio stabile esistente, che si trova molto lontano in $\frac{\pi}{2}$. Se nel sistema ci sono meccanismi dissipativi, la soluzione si assesterà attorno all'equilibrio in $\frac{\pi}{2}$. □