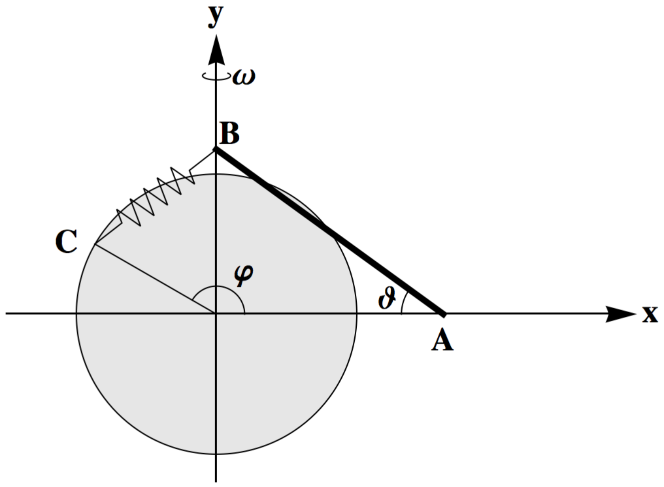
Esercizio 146 *Nel piano Oxy è posto un disco omogeneo di massa M e raggio R il cui centro coincide con O. Un'asta AB di lunghezza ℓ e massa m ha estremo B vincolato a scorrere sull'asse delle y ed estremo A vincolato a scorrere sull'asse delle x. Al punto B dell'asta è attaccata una molla di costante elastica k il cui altro capo è fissato in C, un punto posto sulla circonferenza del disco.*

Il piano Oxy è posto in rotazione uniforme attorno all'asse delle y con velocità angolare ω. Chiamando ϑ l'angolo tra $-e_x$ (e_x è il versore dell'asse delle x) ed il versore $e_{AB} = AB/|AB|$ e φ l'angolo tra e_x ed e_{OC}:

a. *si determinino gli equilibri del sistema;*

b. *assumendo che $\omega^2 = 3k/m$ ed $R = \ell/\sqrt{2}$, si studi la loro stabilità;*

c. *nelle ipotesi fatte al punto* **b**, *si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad uno degli equilibri stabili.*



Svolgimento

a. I punti caratteristici del problema sono

$$OA = \ell(\cos\vartheta, 0), \quad OB = \ell(0, \sin\vartheta), \quad OC = R(\cos\varphi, \sin\varphi).$$

I potenziali che giocano un ruolo in questo problema sono il potenziale elastico

$$V^k_{BC} = \frac{k}{2}|(R\cos\varphi, R\sin\varphi - \ell\sin\vartheta)|^2 \simeq \frac{k}{2}\left(\ell^2\sin^2\vartheta - 2R\ell\sin\varphi\sin\vartheta\right),$$

ed il potenziale centrifugo dell'asta

$$V^{cf}_{AB} = -\frac{1}{2}\omega^2 I$$

dove $I = e_y \cdot \mathcal{I}_B e_y = m\dfrac{\ell^2}{3}\cos^2\vartheta$. Infatti nel sistema di riferimento solidale

$$e_1 = e_{BA} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = e_z \wedge e_1 = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = e_z$$

l'operatore di inerzia $\mathcal{I}_B$ è rappresentato dalla matrice

$$m\frac{\ell^2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ed il versore $e_y = \cos\vartheta e_2 - \sin\vartheta e_1$. Segue che

$$\begin{aligned} V = \frac{k}{2}\left(\ell^2\sin^2\vartheta - 2R\ell\sin\varphi\sin\vartheta\right) - \frac{1}{6}\omega^2 m\ell^2\cos^2\vartheta \simeq \\ \simeq \frac{k}{2}\left(\ell^2\sin^2\vartheta - 2R\ell\sin\varphi\sin\vartheta\right) + \frac{1}{6}\omega^2 m\ell^2\sin^2\vartheta = \\ = \ell^2\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{6}\omega^2 m\right)\sin^2\vartheta - kR\ell\sin\varphi\sin\vartheta \\ = \ell k(\ell\sin^2\vartheta - R\sin\varphi\sin\vartheta) \end{aligned}$$

Chiamiamo $a = \ell^2\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{6}\omega^2 m\right)$ e $b = kR\ell$, il gradiente di V diventa

$$\nabla V = \begin{pmatrix} (2a\sin\vartheta - b\sin\varphi)\cos\vartheta \\ -b\cos\varphi\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

e quindi si annulla:

- quando $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e $\vartheta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ oppure $2a\sin\vartheta = b$ (2 o 3 soluzioni se l'ultima equazione ha soluzioni),
- quando $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ e $\vartheta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ oppure $2a\sin\vartheta = -b$ (2 o 3 soluzioni se l'ultima equazione ha soluzioni),
- oppure quando $\vartheta = 0, \pi$ e $\varphi = 0, \pi$ (4 soluzioni).

b. Con l'ipotesi che $\omega^2 = 3k/m$, il parametro a diventa $k\ell^2$, e con l'ipotesi che $R = \sqrt{2}\ell$ il parametro b diventa $k\ell^2/\sqrt{2}$. In questo caso i due equilibri non ancora determinati sono rispettivamente $\pm\pi/4$.

La matrice Hessiana di V è

$$HV = k\ell^2\begin{pmatrix} \sin\varphi\sin\vartheta + 2 - 4\sin^2\vartheta & -\cos\varphi\cos\vartheta \\ -\cos\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

Quando $\varphi = \pi/2$ la matrice diventa

$$k\ell^2\begin{pmatrix} \sin\vartheta + 2 - 4\sin^2\vartheta & 0 \\ 0 & \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

e, nei tre casi, diventa

$$k\ell^2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k\ell^2\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad k\ell^2\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

quindi il terzo equilibrio è l'unico stabile. Quando $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ la matrice diventa

$$k\ell^2 \begin{pmatrix} -\sin\vartheta + 2 - 4\sin^2\vartheta & 0 \\ 0 & -\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

e, nei tre casi, diventa

$$k\ell^2 \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad k\ell^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k\ell^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

e si ripropone lo stessa situazione del caso precedente. Infine, negli ultimi 4 casi, si ha

$$k\ell^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k\ell^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k\ell^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k\ell^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

che mostra come tutti gli equilibri sono instabili, visto che il determinante è negativo.
c. Abbiamo già calcolato l'Hessiana, dobbiamo calcolare la matrice cinetica, che in questo caso sarà diagonale. Infatti l'energia cinetica che compete al disco è data da

$$\frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2$$

con I_O il momento di inerzia di un disco attorno all'asse baricentrico ortogonale al piano di giacitura, che è $MR^2/2 = M\ell^2$. Mentre l'energia cinetica dell'asta è

$$\frac{1}{2} m |v_G|^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\vartheta}^2$$

con G il baricentro dell'asta ed I_G il momento di inerzia di un asta attorno ad un asse passante per il baricentro ed ortogonale alla retta di giacitura, quindi $v_G = \ell/2\dot{\vartheta}(-\sin\vartheta, \cos\vartheta, 0)$ e $I_G = m\ell^2/12$. L'energia cinetica della sbarra è quindi $T = m\frac{1}{3}\ell^2\dot{\vartheta}^2$.

(Si poteva anche usare la formula $T = \frac{1}{2} m |v_B|^2 + m v_B \cdot (\dot{\vartheta} e_z \wedge BG) + \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 e_z \cdot \mathcal{I}_B e_z$ per ottenere $\frac{1}{2} m\ell^2\dot{\vartheta}^2 \cos^2\vartheta - \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta + m\frac{\ell^2}{3}\dot{\vartheta}^2$.)

L'energia cinetica totale è

$$T = \frac{1}{2}\left(M\ell^2\dot{\varphi}^2 + m\frac{1}{3}\ell^2\dot{\vartheta}^2 \right).$$

e la matrice ad essa associata è

$$A = \ell^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3}m & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

Le frequenze di piccole oscillazioni si calcolano risolvendo

$$0 = \det \left[k\ell^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \lambda \ell^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3}m & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \right]$$

e porge le due frequenze $\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{k}{m}}$, e $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\sqrt{\frac{k}{M}}$. □