Esercizio 15 *Un punto materiale P di massa m è vincolato ad una retta orizzontale nel piano cartesiano Oxy. Un altro punto Q di massa uguale è vincolato, nello stesso piano, ad una retta orizzontale parallela alla prima che dista ℓ da essa. Sul sistema agisce la gravità ed una molla di costante elastica k che collega i due punti materiali.*

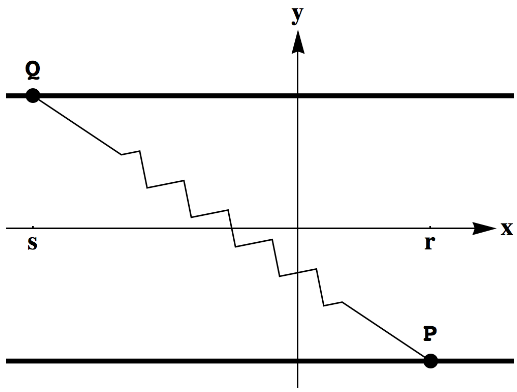
Scegliendo come coordinate lagrangiane le ascisse r ed s dei punti P e Q (vedi figura).

a. *Scrivere la Lagrangiana del sistema.*

b. *Cambiando opportunamente le coordinate, riscrivere la Lagrangiana così da esporre una coordinata ciclica. Scrivere l'integrale del moto ad essa associata e la Lagrangiana ridotta alla Routh.*

c. *Studiare le piccole oscillazioni del sistema ridotto. Dire se le soluzioni di piccole oscillazioni si discostano molto dalle soluzioni reali.*

d. *Ricostruire il moto all'equilibrio relativo.*



Svolgimento

a. La Lagrangiana è

$$L(r, s, \dot{r}, \dot{s}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{s}^2) - \frac{k}{2}(r - s)^2.$$

b. Conviene cambiare le coordinate $R = r + s$ ed $S = r - s$. Con questa scelta la Lagrangiana diventa

$$L'(R, S, \dot{R}, \dot{S}) = \frac{1}{4}m(\dot{R}^2 + \dot{S}^2) - \frac{k}{2}S^2.$$

Di conseguenza il momento conservato è

$$P(R, S, \dot{R}, \dot{S}) = \partial_{\dot{R}}L' = \frac{1}{2}m\dot{R} = \frac{1}{2}m(\dot{r} + \dot{s}).$$

Questo altro non è che la conservazione della componente x del momento lineare. Ponendo $P = c$ si ottiene che $\dot{R} = \frac{2c}{m}$. Segue che la Lagrangiana ridotta è

$$L'_c = \frac{1}{4}m\dot{S}^2 - \frac{k}{2}S^2 - \frac{c^2}{m} \simeq \frac{1}{4}m\dot{S}^2 - \frac{k}{2}S^2.$$

c. Stiamo trattando un sistema 1-dimensionale, quindi le matrici che appaiono nelle piccole oscillazioni sono di dimensione 1. La matrice A è $(\frac{1}{2}m)$, la matrice $V'' = (k)$. L'equazione agli autovalori è $k - \lambda\frac{m}{2}$. Quindi $\lambda = 2\frac{k}{m}$.

Le soluzioni di piccola oscillazione sono

$$S_t = A \sin\left(\sqrt{2\frac{k}{m}}\,t + a\right) = A \sin\left(\sqrt{2\frac{k}{m}}\,t\right) + B \cos\left(\sqrt{2\frac{k}{m}}\,t\right)$$

Il problema iniziale è già lineare, quindi il problema linearizzato è esattamente il problema iniziale.

d. Tutte le soluzioni ricostruite possono essere esplicite, perchè le soluzioni di piccole oscillazioni sopra sono in realtà soluzioni vere del problema. In ogni caso l'equilibrio relativo (equilibrio per il sistema ridotto) è la funzione $S_t \equiv 0$. La legge di conservazione permette di ottenere che $R_t = \frac{2c}{m}t + R_0$. La soluzione ricostuita è

$$S_t \equiv 0 \qquad R_t = \frac{2c}{m}t + R_0$$

Nelle coordinate iniziali si ha che $r_t = s_t = \frac{c}{m}t + a$ (a è una costante di integrazione). I due punti materiali hanno sempre stessa coordinata x e traslano assieme con velocità costante. $\square$