Esercizio 150 *Il sistema di Kepler piano in riferimento della massa ridotta tratta un punto materiale di massa μ soggetto ad un campo centrale di intensità $h/|OP|^2$. Ricordando che questo sistema ha per integrali primi il momento angolare $M = \mu OP \wedge \dot{OP}$ ed il vettore di Runge-Lenz*

$$R = \mu \dot{OP} \wedge (OP \wedge \dot{OP}) - h\frac{OP}{|OP|}.$$

a. *Scrivere Lagrangiana ed integrali primi in coordinate Cartesiane;*
b. *scrivere la trasformazione di Legendre, la Hamiltoniana del sistema, le equazioni di Hamilton, i 4 integrali del moto, e controllare che le loro parentesi di Poisson siano effettivamente nulle;*
c. *Fare lo stesso in coordinate polari.*

SVOLGIMENTO

a. Il potenziale del sistema è $V = -h/|OP|$, quindi la Lagrangiana è

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{h}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

mentre le espressioni delle componenti non-nulle degli altri integrali primi sono

$$M_z = \mu(x\dot{y} - y\dot{x}), \quad R_x = \dot{y}M_z - h\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad R_y = -\dot{x}M_z - h\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

b. La trasformata di Legendre è la mappa

$$\mathcal{L} : (x, y, \dot{x}, \dot{y}) \to (x, y, p_x = \partial_{\dot{x}}L = \mu\dot{x}, p_y = \partial_{\dot{y}}L = \mu\dot{y}),$$

di inversa

$$\mathcal{L}^{-1} : (x, y, p_x, p_y) \to (x, y, \mu^{-1}p_x, \mu^{-1}p_y).$$

La Hamiltoniana è l'integrale di Jacobi $E = \frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - h/\sqrt{x^2+y^2}$ a cui vengono sostituite le variabili di velocità con le associate variabili di momento, ovvero

$$H = E \circ \mathcal{L}^{-1} = \frac{1}{2\mu}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{h}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Le relative equazioni di Hamilton sono

$$\dot{x} = \partial_{p_x}H = \frac{p_x}{2\mu}, \quad \dot{y} = \partial_{p_y}H = \frac{p_y}{2\mu}, \quad \dot{p}_x = -\partial_x H = -\frac{h\,x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}, \quad \dot{p}_y = -\partial_y H = -\frac{h\,y}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

Con un ragionamento abbastanza semplice, si può dimostrare che se F è un integrale primo per le equazioni di Lagrange, allora la funzione $\widetilde{F} = F \circ \mathcal{L}^{-1}$ è integrale primo delle equazioni di

Hamilton. Di conseguenza, oltre alla Hamiltoniana, tre integrali primi del sistema Hamiltoniano sono le funzioni

$$\widetilde{M}_z = xp_y - yp_x, \quad \widetilde{R}_x = \mu^{-1}p_y(xp_y - yp_x) - h\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \widetilde{R}_y = -\mu^{-1}p_x(xp_y - yp_x) - h\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Per controllare se sono integrali del moto basta calcolare le parentesi di Poisson, che sono un conto algebrico. Cominciamo con il momento angolare

$$\{H, \widetilde{M}_z\} = \partial_x H \partial_{p_x}\widetilde{M}_z - \partial_{p_x}H\partial_x\widetilde{M}_z + \partial_y H\partial_{p_y}\widetilde{M}_z - \partial_{p_y}H\partial_y\widetilde{M}_z =$$
$$\left(\frac{h\,x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\right)(-y) - \left(\frac{p_x}{\mu}\right)p_y + \left(\frac{h\,y}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\right)x - \left(\frac{p_y}{\mu}\right)(-p_x) = 0$$

e controlliamo la componente x del vettore di Runge-Lenz

$$\{H, \widetilde{R}_x\} = \partial_x H\partial_{p_x}\widetilde{R}_x - \partial_{p_x}H\partial_x\widetilde{R}_x + \partial_y H\partial_{p_y}\widetilde{R}_x - \partial_{p_y}H\partial_y\widetilde{R}_x =$$
$$\left(\frac{h\,x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\right)(-\mu^{-1}p_y y) - \left(\frac{p_x}{\mu}\right)\left(\mu^{-1}p_y^2 - \frac{h}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{hx^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\right) +$$
$$+\left(\frac{h\,y}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\right)(\mu^{-1}(xp_y - yp_x) + \mu^{-1}p_y x) - \left(\frac{p_y}{\mu}\right)\left(-\mu^{-1}p_x p_y + \frac{hxy}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\right) =$$
$$= \frac{h\,\mu^{-1}}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\left(-x\,p_y\,y + p_x x^2 + p_x y^2 - p_x x^2 + 2yxp_y - y^2 p_x - p_y\,x\,y\right) = 0$$

Un conto simile porta alla Poisson-commutatività anche di $\widetilde{R}_y$ con H.
c. Bisogna riscrivere tutte le funzioni in coordinate polari. Ricordiamo che in tali coordinate $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, e quindi $\dot{x} = \dot{r}\cos\vartheta - r\dot{\vartheta}\sin\vartheta$ ed $\dot{y} = \dot{r}\sin\vartheta + r\dot{\vartheta}\cos\vartheta$. Segue che la Lagrangiana diventa

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) + \frac{h}{r}.$$

Invece gli integrali del moto non nulli sono le funzioni

$$M_z = \mu r^2\dot{\vartheta}, \qquad R_x = (\dot{r}\sin\vartheta + r\dot{\vartheta}\cos\vartheta)r^2\dot{\vartheta} - h\cos\vartheta, \quad R_y = -(\dot{r}\cos\vartheta - r\dot{\vartheta}\sin\vartheta)r^2\dot{\vartheta} - h\sin\vartheta.$$

La trasformata di Legendre è $p_r = \mu\dot{r}$, $p_\vartheta = \mu r^2\dot{\vartheta}$, e quindi la Hamiltoniana è

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2}\right) - \frac{h}{r}$$

Gli integrali del moto diventano

$$\widetilde{M}_z = p_\vartheta, \quad \widetilde{R}_x = p_\vartheta\frac{p_\vartheta\cos\vartheta + r\,p_r\sin\vartheta}{r\,\mu} - h\cos\vartheta, \quad \widetilde{R}_y = -p_\vartheta\frac{r\,p_r\cos\vartheta - p_\vartheta\sin\vartheta}{r\,\mu} - h\sin\vartheta.$$

Per controllare se sono integrali del moto basta calcolare le parentesi di Poisson, che sono un conto algebrico. Cominciamo con il momento angolare

$$\{H, \widetilde{M}_z\} = \partial_r H \partial_{p_r} \widetilde{M}_z - \partial_{p_r} H \partial_r \widetilde{M}_z + \partial_\vartheta H \partial_{p_\vartheta} \widetilde{M}_z - \partial_{p_\vartheta} H \partial_\vartheta \widetilde{M}_z = \\ \left(-\frac{1}{\mu}\frac{p_\vartheta^2}{r^3} + \frac{h}{r^2}\right)(0) - \left(\frac{p_r}{\mu}\right)(0) + (0)(1) - \left(\frac{p_\vartheta}{r^2\,\mu}\right)(0) = 0$$

e controlliamo la componente x del vettore di Runge-Lenz

$$\{H, \widetilde{R}_x\} = \partial_r H \partial_{p_r} \widetilde{R}_x - \partial_{p_r} H \partial_r \widetilde{R}_x + \partial_\vartheta H \partial_{p_\vartheta} \widetilde{R}_x - \partial_{p_\vartheta} H \partial_\vartheta \widetilde{R}_x = \\ \left(-\frac{p_\vartheta^2}{\mu\, r^3} + \frac{h}{r^2}\right)\left(\frac{p_\vartheta \sin\vartheta}{\mu}\right) - \left(\frac{p_r}{\mu}\right)\left(-\frac{p_\vartheta^2 \cos\vartheta}{\mu\, r^2}\right) + (0)(*) + \\ - \left(\frac{p_\vartheta}{r^2\,\mu}\right)\left(p_\vartheta \frac{-p_\vartheta \sin\vartheta + r\, p_r \cos\vartheta}{r\,\mu} - h \sin\vartheta\right) = 0$$

Un conto simile porta alla Poisson-commutatività anche di $\widetilde{R}_y$ con H. □