

Esercizio 16 Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y \\ \dot{y} = 5x + y \end{cases}$$

- a. Determinare gli equilibri.
- b. Determinare i parametri a, b, c in modo tale che la funzione $W = ax^2 + by^2 + cxy$ sia integrale del moto.
- c. La funzione W appena trovata può essere usata per ottenere informazioni sulla stabilità dell'origine?

SVOLGIMENTO

- a. Solo l'origine è equilibrio.
- b. La derivata di Lie della funzione W è $(5c - 2a)x^2 - 2(a - 5b)yx + (2b - c)y^2$. Perché W sia integrale del moto bisogna annullare tutti i coefficienti di $L_X W$. Si ottiene che $a = 5c/2$, $b = c/2$. Da cui segue che, scelto $c = 2$

$$W = 5x^2 + y^2 + 2xy$$

Ovviamente tutti i multipli di W sono integrali primi.

- c. Visto che la funzione W scelta ha minimo stretto in $(0, 0)$, come si vede calcolando gradiente e matrice Hessiana o come si controlla più semplicemente completando i quadrati $(5x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 + 4x^2 > 0$ se x, y non sono entrambe nulli) si ha la stabilità semplice e non quella asintotica. □