Esercizio 18 *Nel piano Oxy del riferimento non inerziale Oxyz, uniformemente rotante attorno all'asse y con velocità angolare di trascinamento* $\underline{\omega} = \omega\hat{y}$*, y verticale ascendente* $\underline{g} = -g\hat{y}$*, è posta una guida curvilinea di equazione* $y = x^2$*. Su di essa è vincolata senza attrito una particella di massa m. Si utilizzi il parametro Lagrangiano libero* $x \in \mathbb{R}$*.*
a. *Determinare gli equilibri del sistema meccanico e discuterne la stabilità al variare dei parametri strutturali definenti il sistema meccanico* m, g, ω *nei reali positivi.*
b. *Si consideri l'analogo sistema descritto in* **a***, con lo stesso quesito, dove ora la guida curvilinea è di equazione* $y = x^4$*.*
c. *Considerando il sistema in* **b***, a partire dall'espressione generale dell'energia cinetica del punto materiale P nel caso libero, cioè* $\frac{1}{2}m|\dot{OP}|^2$*, determinare la funzione energia cinetica* $T(x, \dot{x})$ *in termini del parametro Lagrangiano indicato e della sua derivata.*

Svolgimento

a. Il sistema è vincolato ed è soggetto alla forza di potenziale mgx^2 ed alla forza centrifuga, il cui potenziale generalizzato è $-1/2m\omega^2x^2$. Il potenziale a cui è sottoposto il sistema è

$$V = m(g - 1/2\omega^2)x^2.$$

Dalla definizione di equilibrio segue che se $2g \neq \omega^2$ allora l'unico equilibrio è $x = 0$. Altrimenti tutti le coordinate x in $\mathbb{R}$ porgono punti di equilibrio.

Dai teoremi di Lagrange-Dirichelet e dell'Hessiana non degenere segue che: se $2g < \omega^2$ allora l'equilibrio è instabile (Hessiana del potenziale definita negativa), se $2g > \omega^2$ allora l'equilibrio è stabile ($x = 0$ è minimo del potenziale).

Se $2g = \omega$ allora i criteri non bastano per decidere ma il potenziale è costantemente nullo, l'energia cinetica quindi si conserva, ed una particella messa in moto con velocità piccolissima lentamente scappa verso l'infinito. Quindi ogni equilibrio è instabile (giustificazione furba fornita da un vostro compagno).

b. Cambia l'energia potenziale, che diventa

$$V = m(gx^4 - 1/2\omega^2x^2).$$

$V' = mx(4gx^2 - \omega^2)$. Quindi l'origine è sempre equilibrio ma appaiono altri due equilibri, quando $x = \pm\frac{\omega}{2\sqrt{g}}$.

La derivata seconda di V è $m(12gx^2 - \omega^2)$. Calcolata in $x = 0$ porge $-m\omega^2 < 0$, quindi l'equilibrio è sempre instabile per il teorema della Hessiana non degenere, a meno che $\omega = 0$, nel qual caso l'equilibrio si dimostra stabile usando il teorema di Lagrange-Dirichelet.

Calcolata in $x = \pm\frac{\omega}{2\sqrt{g}}$ si ha che $V'' = 2m\omega^2$, che è sempre positiva. Quindi per Lagrange-Dirichelet si ha la stabilità.

c. Si scrive la posizione $OP = (x, x^4)$ e si deriva $\dot{OP} = (\dot{x}, 4x^3\dot{x})$. Infine si ha che $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + 16x^6)$. □