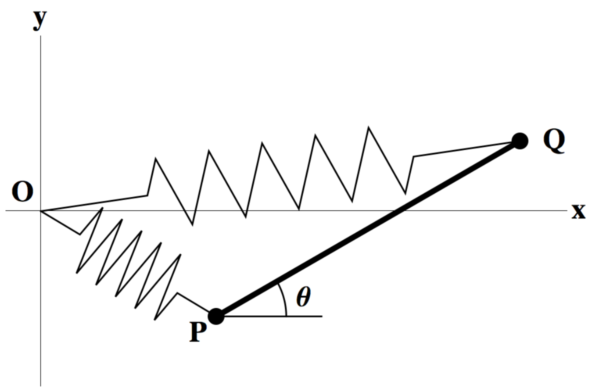
Esercizio 19 *Due punti materiali P di massa m e Q di massa $2m$ sono fissati attraverso un'asta di massa trascurabile PQ di lunghezza ℓ.*
Le forze agenti sul sistema sono la forza peso verticale discendente e le forze di richiamo di due molle, di costante elastica k, che collegano P all'origine e Q all'origine. Scegliendo come coordinate Lagrangiane le coordinate di P, x, y, e l'angolo tra l'asta PQ e l'asse delle x, ϑ (vedi figura).



a. *Determinare gli equilibri del sistema e discuterne la stabilità.*
b. *Determinare le frequenze delle piccole oscillazioni all'unico equilibrio stabile nel caso in cui $k = \frac{gm}{\ell}$.*

SVOLGIMENTO

a. Il potenziale è

$$
\begin{aligned}
V &= V_{g_P} + V_{g_Q} + V_{k_P} + V_{k_Q} = \\
&= mgy + 2mg(y + \ell\sin(\vartheta)) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{k}{2}((x + \ell\cos(\vartheta))^2 + (y + \ell\sin(\vartheta))^2) = \\
&\simeq k\left(x^2 + y^2 + \ell(x\cos(\vartheta) + y\sin(\vartheta))\right) + 2mg\ell\sin(\vartheta) + 3mgy
\end{aligned}
$$

Il gradiente del potenziale è

$$
\nabla V = \begin{pmatrix} k(2x+\ell\cos(\vartheta)) \\ k(2y+\ell\sin(\vartheta))+3mg \\ k\ell(y\cos(\vartheta)-x\sin(\vartheta))+2mg\ell\cos(\vartheta) \end{pmatrix}.
$$

Uguagliandolo a zero si ottiene dalla prima equazione che $x = -\frac{\ell}{2}\cos\vartheta$ e dalla seconda che $y = \frac{3mg}{2k} - \frac{\ell}{2}\sin\vartheta$. Sostituendo nella terza si ottiene che (a meno di costanti) $\cos\vartheta = 0$, da cui segue che ci sono solo 2 equilibri

$$
(x_1, y_1, \vartheta_1) = \left(0, \frac{-k\ell - 3mg}{2k}, \frac{\pi}{2}\right), \qquad (x_2, y_2, \vartheta_2) = \left(0, \frac{k\ell - 3mg}{2k}, -\frac{\pi}{2}\right)
$$

Per discutere la stabilità bisogna calcolare la matrice Hessiana nei punti di equilibrio. Si ottiene

$$
\operatorname{Hess} V = \begin{pmatrix} 2k & 0 & -k\ell\sin(\vartheta) \\ 0 & 2k & k\ell\cos(\vartheta) \\ -k\ell\sin(\vartheta) & k\ell\cos(\vartheta) & -k\ell\Big(x\cos(\vartheta)+y\sin(\vartheta)\Big)-2mg\ell\sin(\vartheta) \end{pmatrix}
$$

Calcolata negli equilibri si ottiene

$$\operatorname{Hess} V(x_1,y_1,\vartheta_1) = \begin{pmatrix} 2k & 0 & -k\ell \\ 0 & 2k & 0 \\ -k\ell & 0 & \frac{1}{2}\ell(k\ell-gm) \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Hess} V(x_2,y_2,\vartheta_2) = \begin{pmatrix} 2k & 0 & k\ell \\ 0 & 2k & 0 \\ k\ell & 0 & \frac{1}{2}\ell(k\ell+gm) \end{pmatrix}$$

La prima Hessiana ha segnatura $+,+,-$ (il determinante vale $-2gk^2m\ell < 0$), mentre la seconda matrice è definita positiva. Quindi il primo equilibrio è instabile per il teorema della "Hessiana direzionalmente negativa" mentre il secondo è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichelet.

b. Bisogna ora calcolare la matrice cinetica. Si scrivono i vettori $\dot{OP}$ e $\dot{OQ}$, e si ottiene

$$T(x,y,\vartheta,\dot{x},\dot{y},\dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}m\left(3\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2 + 2\dot{\vartheta}^2\ell^2 + 4\ell(\cos(\vartheta)\dot{\vartheta}\dot{y} - \sin(\vartheta)\dot{\vartheta}\dot{x})\right).$$

La matrice cinetica quindi è

$$A(x,y,\vartheta) = \begin{pmatrix} 3m & 0 & -2m\ell\sin(\vartheta) \\ 0 & 3m & 2m\ell\cos(\vartheta) \\ -2m\ell\sin(\vartheta) & 2m\ell\cos(\vartheta) & 2m\ell^2 \end{pmatrix}$$

Calcolata nell'equilibrio stabile si ha

$$A(x_2,y_2,\vartheta_2) = \begin{pmatrix} 3m & 0 & 2m\ell \\ 0 & 3m & 0 \\ 2m\ell & 0 & 2m\ell^2 \end{pmatrix}$$

Per scrivere le frequenze delle piccole oscillazioni si deve risolvere l'equazione caratteristica

$$\det\left[\frac{mg}{\ell}\begin{pmatrix} 2 & 0 & \ell \\ 0 & 2 & 0 \\ \ell & 0 & \ell^2 \end{pmatrix} - \lambda m \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2\ell \\ 0 & 3 & 0 \\ 2\ell & 0 & 2\ell^2 \end{pmatrix}\right] = 0$$

ovvero, ponendo $\mu\frac{g}{\ell} = \lambda$,

$$\det\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & \ell \\ 0 & 2 & 0 \\ \ell & 0 & \ell^2 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2\ell \\ 0 & 3 & 0 \\ 2\ell & 0 & 2\ell^2 \end{pmatrix}\right] = 0$$

Sviluppando il determinante si arriva all'equazione

$$\ell^2(1-\mu)(1-2\mu)(2-3\mu) = 0$$

Quindi le frequenze di piccole oscillazioni sono $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \sqrt{\frac{1}{2}\frac{g}{\ell}}, \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{\ell}}$ □