

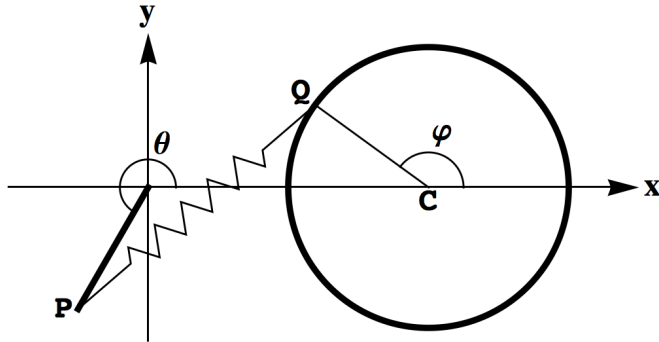
Esercizio 2 Un'asta omogenea OP di lunghezza ℓ e di massa m è attaccata all'origine di un sistema di riferimento Oxy , con y verticale ascendente (agisce quindi la gravità). All'estremità libera dell'asta (nel punto P) è attaccata una molla di costante elastica k il cui altro capo è attaccato ad un punto Q di un anello omogeneo di massa M , raggio ℓ , e centro $C = (2\ell, 0)$. Ricordiamo che il momento di inerzia di un anello rispetto al centro è $M\ell^2$ mentre quello di un'asta rispetto ad un suo estremo è $m\ell^2/3$.

Scegliendo come coordinate Lagrangiane ϑ , angolo formato dal semiasse positivo delle x con l'asta OP e valutato in senso antiorario e φ , angolo formato dal semiasse positivo delle x con il segmento CQ e valutato in senso antiorario,

a. determinare il valore di k affinché la configurazione $\vartheta = \frac{5}{3}\pi$, $\varphi = \frac{7}{6}\pi$ sia di equilibrio;

b. per quel particolare valore di k discutere la stabilità dell'equilibrio di cui al punto a;

c. per quel particolare valore di k , determinare le frequenze di piccole oscillazioni attorno all'equilibrio in questione.



SVOLGIMENTO

a. Le posizioni dei punti rilevanti per il sistema sono $OG = \frac{\ell}{2}(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ (G è il baricentro dell'asta), $OP = \ell(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$, $OQ = \ell(2 + \cos \varphi, \sin \varphi)$. Il potenziale associato al sistema è

$$\begin{aligned} V(\vartheta, \varphi) &= V_G^g + V_{PQ}^k = \\ &= mg\frac{\ell}{2}\sin \vartheta + \frac{k}{2}\left((2\ell + \ell \cos \varphi - \ell \cos \vartheta)^2 + (\ell \sin \varphi - \ell \sin \vartheta)^2\right) \\ &\simeq mg\frac{\ell}{2}\sin \vartheta + k\ell^2(2\cos \varphi - 2\cos \vartheta - \cos(\vartheta - \varphi)). \end{aligned}$$

Per rispondere alla domanda si deve calcolare il gradiente di V , che è

$$\nabla V(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{mg\ell}{2}\cos \vartheta + k\ell^2(2\sin \vartheta + \sin(\vartheta - \varphi)) \\ k\ell^2(-2\sin \varphi - \sin(\vartheta - \varphi)) \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo che valore deve avere k perchè il gradiente sia nullo in $(\frac{5}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi)$. La seconda riga è zero se

$$0 = 2\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1$$

(sempre vera), la prima riga invece porge la relazione

$$\frac{mg\ell}{2} \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + k\ell^2 \left(2 \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{mg\ell}{4} + k\ell^2 (-\sqrt{3} + 1),$$

che porge $k = \frac{gm}{4(\sqrt{3}-1)\ell}$.

b. Per studiare la stabilità si controlla l'Hessiana del potenziale V .

$$HessV = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\ell(-4k\ell \cos(\theta) - 2k\ell \cos(\theta-\varphi) + gm \sin(\theta)) & -k\ell^2 \cos(\theta-\varphi) \\ -k\ell^2 \cos(\theta-\varphi) & -\frac{1}{2}\ell(4k\ell \cos(\varphi) - 2k\ell \cos(\theta-\varphi)) \end{pmatrix}$$

Calcolato nell'equilibrio si ha che $HessV(\frac{5}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi) = mg\ell \begin{pmatrix} \frac{(4-\sqrt{3})}{4(\sqrt{3}-1)} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}-1)} \end{pmatrix}$. Quindi l'equilibrio è stabile dal momento che tutti i numeri nella diagonale sono positivi h_1, h_2 .

c. La matrice Hessiana di V è diagonale, per scrivere la matrice cinetica bisogna calcolare l'energia cinetica, che è la somma dell'energia cinetica di asta e disco. La velocità angolare dell'asta è $\dot{\vartheta}e_z$, e quindi la sua energia cinetica è

$$\frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 e_z \cdot \mathcal{I}_G e_z + \frac{1}{2}m|v_G|^2 = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 \cdot \mathcal{I}_G + \frac{1}{2}m\frac{\ell^2}{4}\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 \frac{m\ell^2}{3}.$$

(L'energia cinetica poteva anche calcolarsi relativamente al punto O .) Per l'anello, un conto analogo porge $\frac{1}{2}M\ell^2\dot{\varphi}^2$. Si ha quindi che la matrice cinetica del sistema è $A = \begin{pmatrix} m\ell^2/3 & 0 \\ 0 & M\ell^2 \end{pmatrix}$, che è pure essa diagonale con entrate a_1, a_2 . La trattazione delle piccole oscillazioni per questo problema si rivela essere triviale, e porge come modi normali le oscillazioni indipendenti di asta e disco con frequenze $\sqrt{h_1/a_1}$ e $\sqrt{h_2/a_2}$. $\square$