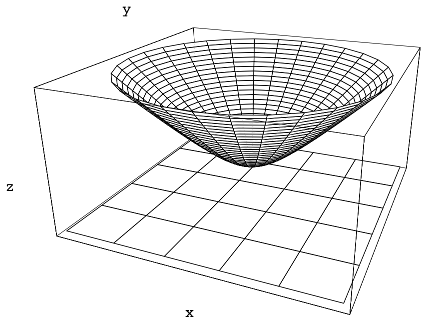
Esercizio 20 *Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie di equazione $z = \sqrt{1+x^2+y^2}$. Sul sistema non agisce alcuna forza attiva.*
Si usi la parametrizzazione data da

$$(s,\vartheta) \mapsto \Big(\sinh(s)\cos(\vartheta), \sinh(s)\sin(\vartheta), \cosh(s)\Big)$$



con s in $\mathbb{R}_+$ e ϑ in S^1.
a. *Si scriva la Lagrangiana del sistema.*
b. *Si riduca alla Routh la Lagrangiana.*
c. *Si scriva Hamiltoniana ed equazioni di Hamilton del sistema ridotto. (Ricordare che $\cosh^2(s) - \sinh^2(s) = 1$ e che $\frac{d}{ds}\cosh(s) = \sinh(s)$ e $\frac{d}{ds}\sinh(s) = \cosh(s)$.)*

SVOLGIMENTO

a. Derivando rispetto al tempo la posizione di P sull'iperboloide ellittico si ottiene che

$$\dot{OP} = \dot{s}(\cos(\theta)\cosh(s), \cosh(s)\sin(\theta), \sinh(s)) + \dot{\theta}(-\sin(\theta)\sinh(s), +\cos(\theta)\sinh(s), 0).$$

L'energia cinetica, e pure la Lagrangiana, sono quindi

$$L = T = \frac{1}{2}m\left((\cosh^2(s)+\sinh^2(s))\dot{s}^2 + \dot{\theta}^2\sinh^2(s)\right)$$

b. La variabile ϑ e' ciclica, si ricava quindi che

$$m\dot{\theta}\sinh^2(s) = c,$$

da cui si ottiene che

$$\dot{\theta} = \frac{c}{m\sinh^2(s)}.$$

Quindi la Lagrangiana ridotta si ottiene consederando la funzione

$$-\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\sinh^2(s) + \frac{1}{2}m(\cosh^2(s)+\sinh^2(s))\dot{s}^2$$

e sostituendo l'espressione di $\dot{\vartheta}$. Si ottiene

$$L_c(s,\dot{s}) = \frac{1}{2}m(\cosh^2(s)+\sinh^2(s))\dot{s}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{m\sinh^2(s)}\right)^2$$

c. La Hamitoniana del sistema si ottiene considerando il cambiamento di coordinate

$$p_s = \partial_{\dot{s}}L = m(\cosh^2(s)+\sinh^2(s))\dot{s} \qquad \dot{s} = \frac{p_s}{m(\cosh^2(s)+\sinh^2(s))}.$$

Usando il solito argomento sulle funzioni omogenee si ottiene facilmente

$$H(s,p_s) = \frac{1}{2}\frac{p_s^2}{m(\cosh^2(s)+\sinh^2(s))} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{m\sinh^2(s)}$$

Le equazioni di Hamilton sono

$$\dot{s} = \partial_{p_s} H = \frac{p_s}{m(\cosh^2(s)+\sinh^2(s))}$$

e

$$\dot{p}_s = -\partial_s H = \frac{1}{2}\frac{p_s}{m}\left(\frac{1}{(\cosh^2(s)+\sinh^2(s))^2} 4\cosh(s)\sinh(s)\right) + \frac{c^2}{m}\frac{\cosh(s)}{\sinh^3(s)}$$

$\square$