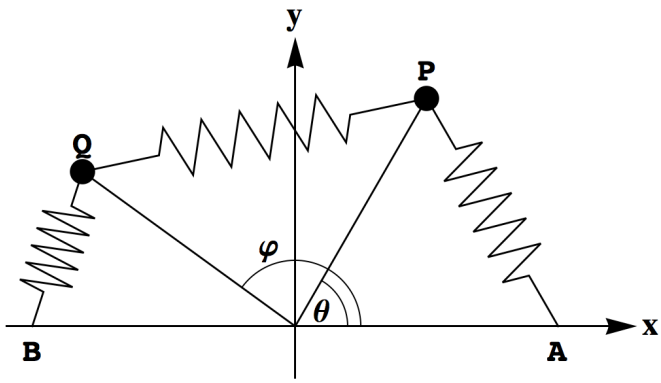
Esercizio 3 *Due aste OP ed OQ di lunghezza ℓ sono attaccate all'origine di un sistema di riferimento Oxy, con y verticale ascendente. All'estremità libera delle aste (i punti P e Q) sono vincolati due punti materiali di massa m, tre molle agiscono sul sistema: la prima collega il punto P al punto $A = (\ell, 0)$, la seconda collega il punto P al punto Q, la terza collega il punto Q al punto $B = (-\ell, 0)$. Le molle hanno tutte costante elastica $k = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\frac{mg}{\ell}$. Scegliendo come coordinate Lagrangiane ϑ, angolo formato da e_x, il versore dell'asse orientato delle x con il versore $e_{OP} = OP/|OP|$, e φ, angolo formato da e_x con e_{OQ}:*
a. *dire se la configurazione $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ e $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ è di equilibrio;*
b. *discuterne la stabilità;*
c. *studiarne le piccole oscillazioni.*



Svolgimento

a. Le configurazioni del sistema sono $OP = \ell(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, $OQ = \ell(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Quindi il potenziale associato al sistema è

$$V(\vartheta.\varphi) = V_{g_P} + V_{g_Q} + V_{k_{AP}} + V_{k_{PQ}} + V_{k_{QB}} =$$

$$= mg\ell\sin\vartheta + mg\ell\sin\varphi + \frac{k}{2}\Big((\ell\cos\vartheta - \ell)^2 + \ell^2\sin^2\vartheta\Big) + \frac{k}{2}\Big((\ell\cos\vartheta - \ell\cos\varphi)^2 + (\ell\sin\vartheta - \ell\sin\varphi)\Big) +$$

$$+\frac{k}{2}\Big((\ell\cos\varphi + \ell)^2 + \ell^2\sin^2\varphi\Big) =$$

$$= mg\ell\sin\vartheta + mg\ell\sin\varphi - k\ell^2\cos\vartheta - k\ell^2\cos(\vartheta - \varphi) + k\ell^2\cos\varphi.$$

Con le ipotesi fatte su k si ha che

$$V = mg\ell(\sin\vartheta + \sin\varphi) - \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}mg\ell(\cos\vartheta + \cos(\vartheta - \varphi) - \cos\varphi).$$

Calcoliamo il gradiente di V, si ha

$$\nabla V = mg\ell\begin{pmatrix} \cos\vartheta + \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(\sin\vartheta + \sin(\vartheta - \varphi)) \\ \cos\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(\sin(\vartheta - \varphi) + \sin\varphi) \end{pmatrix}$$

Per controllare che la configurazione $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ sia di equilibrio basta sostituire questi valori nel gradiente appena calcolato. Si ottiene

$$\nabla V(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi) = mg\ell \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) \end{pmatrix}$$

che è il vettore nullo.
b. Per studiare la stabilità si controlla l'Hessiana del potenziale V.

$$HessV = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta + \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(\cos\vartheta + \cos(\vartheta-\varphi)) & -\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\cos(\vartheta-\varphi) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\cos(\vartheta-\varphi) & -\sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(\cos\varphi - \cos(\vartheta-\varphi)) \end{pmatrix}$$

Calcolato nell'equilibrio si ha che $HessV(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Quindi l'equilibrio è stabile.
c. La matrice Hessiana di V è diagonale, la matrice cinetica del sistema è $m\ell^2 Id$, che è pure diagonale. La trattazione delle piccole oscillazioni è triviale e porge che qualsiasi modo è normale con frequenza $\sqrt{g/\ell}$. $\square$