Esercizio 30 *Data la Lagrangiana*

$$L(r,\vartheta,\varphi,\dot r,\dot\vartheta,\dot\varphi)=\frac{1}{2}m\dot r^2+\frac{1}{2}m(1+r^2)(\dot\varphi^2+\dot\vartheta^2)-k\Big(r^2+r\big(1+\cos(\varphi-\vartheta)\big)\Big).$$

a. *Scrivere le trasformate di Legendre e la Hamiltoniana associata al sistema.*
b. *Dire se la funzione $p_\vartheta - p_\varphi$ è integrale primo del sistema.*

Svolgimento

a. Per definire la trasformata di Legendre dobbiamo scrivere

$$\begin{cases} p_r = m\dot r \\ p_\varphi = m(1+r^2)\dot\varphi \\ p_\vartheta = m(1+r^2)\dot\vartheta \end{cases}$$

Di conseguenza, la trasformata è $(r,\varphi,\vartheta,\dot r,\dot\varphi,\dot\vartheta)\mapsto((r,\varphi,\vartheta,p_r,p_\varphi,p_\vartheta)$.
La Hamiltoniana associata ad L è

$$H(r,\vartheta,\varphi,p_r,p_\varphi,p_\vartheta)=\frac{1}{2m}p_r^2+\frac{1}{2m(1+r^2)}(p_\varphi^2+p_\vartheta^2)+k\Big(r^2+r\big(1+\cos(\varphi-\vartheta)\big)\Big).$$

b. Il modo più semplice per mostrarlo è osservare che $\dot p_\vartheta=-\partial_\vartheta H=-kr\sin(\varphi-\vartheta)$, mentre $\dot p_\varphi=-\partial_\varphi H=kr\sin(\varphi-\vartheta)$. Segue che $\dot p_\vartheta-\dot p_\varphi=-2kr\sin(\varphi-\vartheta)$. La funzione $p_\vartheta+p_\vartheta$ invece è integrale del moto (e per la verità volevamo scegliere quella). $\square$