

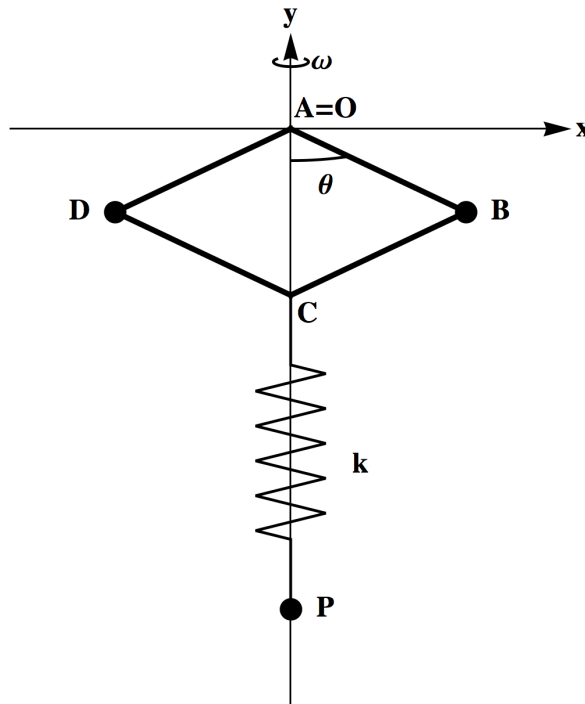
Esercizio 6 Quattro aste di lunghezza ℓ sono attaccate tra loro negli estremi così da formare un parallelepipedo snodato $ABCD$. Il vertice A del parallelepipedo è vincolato a giacere nell'origine di un piano cartesiano Oxy , il vertice C è vincolato a scorrere lungo l'asse delle y . In B e D sono attaccati punti materiali di massa m . Al punto C è attaccata una molla di costante elastica k al cui capo libero è attaccato un punto materiale P di massa m , vincolato a scorrere sull'asse delle y . Il sistema di riferimento non è inerziale, ma gira con velocità angolare ω attorno all'asse delle y . Sul sistema agisce la gravità, che è verticale discendente.

Scegliendo come coordinate Lagrangiane ϑ , l'angolo tra $-e_y$, il versore dell'asse orientato delle y che punta verso le y decrescenti ed il versore $e_{AB} = AB/|AB|$, ed s , la coordinata y di P (si trascurino i problemi che potrebbero sorgere quando $\vartheta = \pi/2$):

a. scrivere la Lagrangiana del problema. (N.B. il potenziale centrifugo di un punto Q è dato da $-\frac{1}{2}m_Q|\omega \times OQ|^2$, la forza di Coriolis ha componenti Lagrangiane Q_{coriolis} nulle.)

b. determinare il valore di ω per il quale esiste una configurazione di equilibrio con $\vartheta = \pi/3$. Qual'è questa configurazione (quanto vale s)?

c. Determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio con $\vartheta > 0$ che si ottiene quando $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Per semplificare i conti, assumere anche che $mg = \frac{2}{3}k\ell$.



SVOLGIMENTO

a. Per scrivere la Lagrangiana del sistema dobbiamo calcolare la funzione energia cinetica ed il potenziale. Le coordinate e gli atti di moto dei punti rilevanti sono:

$$OB = \ell(\sin \vartheta, -\cos \vartheta), \quad OD = \ell(-\sin \vartheta, -\cos \vartheta), \quad OP = (0, s), \quad OC = \ell(0, -2\cos \vartheta)$$

da cui si ha che

$$\dot{OB} = \ell\dot{\vartheta}(\cos \vartheta, \sin \vartheta), \quad \dot{OD} = \ell\dot{\vartheta}(-\cos \vartheta, \sin \vartheta), \quad \dot{OP} = (0, \dot{s})$$

Si ha quindi che l'energia cinetica del sistema è

$$T(\vartheta, s, \dot{\vartheta}, \dot{s}) = \frac{1}{2}m(\dot{s}^2 + 2\ell^2\dot{\vartheta}^2)$$

Il potenziale è la funzione $V(r, s) = V_{\omega_B} + V_{\omega_D} + V_{\omega_P} + V_{g_B} + V_{g_D} + V_{g_P} + V_{k_{PC}}$. In particolare,

$$V_{\omega_B} = -\frac{1}{2}m\omega^2 x_B^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 \ell^2 \sin^2 \vartheta = V_{\omega_D}, \quad V_{\omega_P} = 0$$

$$V_{g_B} = mgy_B = -mg\ell \cos \vartheta = V_{g_D}, \quad V_{g_P} = mgs, \quad V_{k_{PC}} = \frac{k}{2}|PC|^2 = \frac{k}{2}(2\ell \cos \vartheta + s)^2$$

Ne segue che

$$V(\vartheta, s) = -m\omega^2 \ell^2 \sin^2 \vartheta - 2mg\ell \cos \vartheta + mgs + \frac{k}{2}(2\ell \cos \vartheta + s)^2$$

La Lagrangiana è la funzione $T - V$.

b. Dal momento che la Lagrangiana è indipendente dal tempo, determinare gli equilibri è equivalente a determinare i punti stazionari del potenziale. Il gradiente di V è

$$\nabla V(\vartheta, s) = \begin{pmatrix} -2\ell(-gm+ks+\ell(m\omega^2+2k)\cos(\theta))\sin(\theta) \\ gm+ks+2k\ell\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Perchè esista una configurazione di equilibrio in $\vartheta = \pi/3$ deve essere che $\nabla V(\pi/3, s) = 0$ per qualche s . Calcolando il gradiente in $\vartheta = \pi/3$ si ha $\begin{pmatrix} -\sqrt{3}\ell(-gm+ks+\frac{1}{2}\ell(m\omega^2+2k)) \\ gm+ks+k\ell \end{pmatrix}$.

Segue che $s = -\frac{gm+k\ell}{k}$ dalla seconda equazione e che quindi $\omega = \pm \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\ell}}$ dalla prima.

c. Il valore di ω è precisamente quello trovato sopra, quindi l'equilibrio è $(\pi/3, -\frac{gm+k\ell}{k})$. Per studiare le piccole oscillazioni si deve calcolare la matrice cinetica nell'equilibrio, che è la matrice $A = \begin{pmatrix} 2m\ell^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ e la matrice Hessiana del potenziale al punto di equilibrio, che è $V'' = \begin{pmatrix} 3\ell(2gm+k\ell) & -\sqrt{3}k\ell \\ -\sqrt{3}k\ell & k \end{pmatrix}$. L'equazione per determinare le frequenze di piccole oscillazioni è

$$\det \left[\begin{pmatrix} 3\ell(2gm+k\ell) & -\sqrt{3}k\ell \\ -\sqrt{3}k\ell & k \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2m\ell^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Assumendo che $mg = \frac{2}{3}k\ell$ si ha l'equazione

$$\det \left[\begin{pmatrix} 7k\ell^2 & -\sqrt{3}k\ell \\ -\sqrt{3}k\ell & k \end{pmatrix} - \lambda m \begin{pmatrix} 2\ell^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0,$$

da cui si ricava che $4k^2\ell^2 + 2m^2\lambda^2\ell^2 - 9km\lambda\ell^2$, le cui soluzioni sono $\frac{k}{2m}, \frac{4k}{m}$. Quindi, le frequenze delle piccole oscillazioni sono $\sqrt{\frac{k}{2m}}$ e $\sqrt{\frac{4k}{m}}$. $\square$