Esercizio 7 *Sia dato il campo vettoriale*

$$X(x,y) = \begin{pmatrix} 4-x^2-2y-xy \\ \frac{1}{2}xy \end{pmatrix}.$$

a. *Determinare gli equilibri e linearizzare il campo vettoriale nell'equilibrio con $y \neq 0$, chiamiamo l'equilibrio (x_0, y_0).*
b. *Discutere la stabilità dell'equilibrio per il sistema linearizzato sia con il metodo spettrale che con il metodo delle funzioni di Liapunov usando $W(\xi,\eta) = \xi^2 + \eta^2 + \xi\eta$.*
c. *Che funzione usereste come funzione di Liapunov all'equilibrio (x_0, y_0)? (usare in qualche modo W.) Fare i controlli che servono a discutere la stabilità dell'equilibrio per il sistema non lineare.*

Svolgimento

a. Dalla seconda equazione si ha che o $x = 0$ od $y = 0$. Se $x = 0$ allora la prima equazione porge $y = 2$. Se $y = 0$ allora la prima equazione porge $x = \pm 2$. Quindi gli equilibri sono tre, $(0,2)$, $(\pm 2, 0)$. La linearizzazione all'equilibrio $(0,2)$ è il sistema lineare associato alla matrice $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
b. Gli autovalori del sistema lineare sono $-1 \pm i$. Quindi il metodo spettrale mostra che l'origine è equilibrio asintoticamente stabile (in realtà dimostra anche che l'equilibrio $(0,2)$ è asintoticamente stabile per il sistema non lineare). La funzione W ha minimo stretto nell'origine e la sua derivata di Lie è $-3\xi^2 - 4\xi\eta - 2\eta^2$, che è definita negativa. Quindi l'origine è un equilibrio asintoticamente stabile.
c. Ovviamente, conviene usare $F(x,y) = W(x, y-2)$. La funzione F ha certamente un minimo stretto nel punto $(0,2)$. La sua derivata di Lie per il sistema non lineare è $L_X F(x,y) = 4x + 2x^2 - 2x^3 - 4xy - \frac{5}{2}x^2y + 8y - 2y^2 - 8$. La matrice Hessiana di questa funzione calcolata in $(0,2)$ è $\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$. Con il metodo dei minori si dimostra che $L_X F$ è strettamente negativa in un intorno bucato di $(0,2)$. Abbiamo ri-dimostrato la stabilità asintotica dell'equilibrio (già sancita dal metodo spettrale). □