Esercizio 71 *Un punto di massa m è vincolato alla superficie di un toro immerso in $\mathbb{R}^3$. Il toro è dato dalle equazioni parametriche*

$$x = \cos\varphi(R + r\cos\vartheta), \quad y = \sin\varphi(R + r\cos\vartheta), \quad z = r\sin\vartheta$$

con $0 < r < R$ lunghezze e $\vartheta, \varphi \in S^1$. Sul punto non agiscono forze attive.

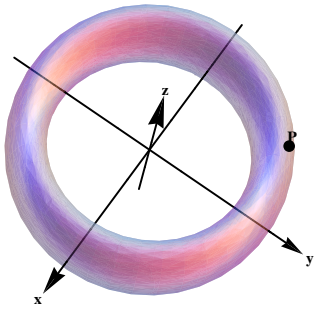
a. *Scrivere la Lagrangiana, usando le coordinate ϑ, φ.*

b. *Scrivere la Lagrangiana del sistema ridotto (alla Routh) per il generico valore c del momento conservato.*

c. *Disegnare il ritratto in fase del sistema ridotto per $c \neq 0$ e per $c = 0$.*

d. *scrivere la legge oraria dei moti del sistema completo corrispondenti all'equilibrio del sistema ridotto nel caso $c \neq 0$ e tutte le soluzioni nel caso in cui $c = 0$.*

e. *Assumendo $c \neq 0$, calcolare le frequenze ed i modi normali di piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile del sistema ridotto.*



Svolgimento

a. La posizione del punto P in coordinate Lagrangiane è data da

$$(\vartheta, \varphi) \mapsto (\cos\varphi(R + r\cos\vartheta), \sin\varphi(R + r\cos\vartheta), r\sin\vartheta),$$

quindi la velocità del punto è

$$v_P = \dot\varphi(-\sin\varphi(R + r\cos\vartheta), \cos\varphi(R + r\cos\vartheta), 0) + r\dot\vartheta(-\cos\varphi\sin\vartheta, -\sin\varphi\sin\vartheta, \cos\vartheta).$$

Visto che v_P è somma di due vettori ortogonali, la norma quadrata di v_p è $|v_P|^2 = \dot\varphi^2(R + r\cos\vartheta)^2 + r^2\dot\vartheta^2$, e quindi l'energia cinetica T, che coincide con la Lagrangiana L, è

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot\varphi^2(R + r\cos\vartheta)^2 + r^2\dot\vartheta^2\right)$$

b. La variabile φ è ciclica, possiamo quindi ridurre alla Routh rispetto ad essa. Si ottiene che la legge di conservazione è

$$\partial_{\dot\varphi} L = m\dot\varphi(R + r\cos\vartheta)^2 = c,$$

da cui si deduce che

$$\dot\varphi = \frac{c}{m(R + r\cos\vartheta)^2}.$$

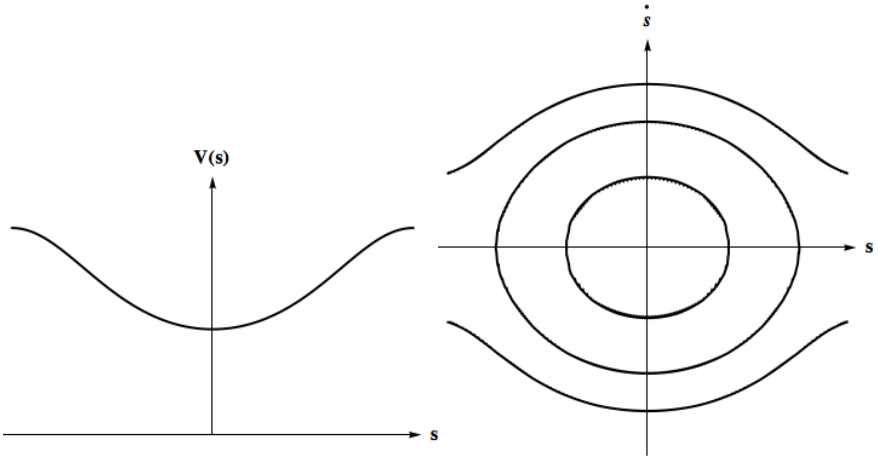
Osserviamo che la variabile φ è adimensionale, quindi c ha la dimensione di momento angolare $[kg\, mt^2\, sec^{-1}]$ (un momento lineare ha dimensioni $[kg\, mt\, sec^{-1}]$). La Lagrangiana ridotta è

$$L_c^R = \frac{1}{2}mr^2\dot\vartheta^2 - \frac{c^2}{2m(R + r\cos\vartheta)^2}$$

c. La Lagrangiana ridotta è quella di un sistema conservativo 1D (nella coordinata s) con matrice cinetica $A(s) = mr^2$ e con potenziale

$$\frac{c^2}{2m(R + r\cos\vartheta)^2}.$$

La conservazione dell'energia permette di disegnare i ritratti in fase: se $c \neq 0$ allora il ritratto in fase è



Per fare il disegno, è opportuno il controllo della derivata prima, che è $V' = \frac{c^2 r\sin\vartheta}{m(R+r\cos\vartheta)^3}$. Questa si annulla in $0, \pi$. La derivata seconda nei punti critici è

$$V''(0) = \frac{c^2 r\cos\vartheta}{m(R + r\cos\vartheta)^3}\Big|_{\vartheta=0} = \frac{c^2 r}{m(R + r)^3} > 0 \qquad V''(\pi) = -\frac{c^2 r}{m(R - r)^3} < 0.$$

d. Agli equilibri $\vartheta = 0, \pi$ la ricostruzione porge i due paralleli, uno interno ed uno esterno, che vengono parametrizzati da

$$\vartheta_t \equiv 0, \quad \varphi_t = \frac{c}{m(R + r)^2}t + \varphi_0, \qquad\qquad \vartheta_t \equiv \pi, \quad \varphi_t = \frac{c}{m(R - r)^2}t + \varphi_0$$

Se $c = 0$ allora il ritratto in fase è costituito dalle rette orizzontali $\dot{\vartheta} = \pm\sqrt{\frac{2e}{mr^2}}$. Le soluzioni di questo sistema sono

$$\vartheta_t = \pm\sqrt{\frac{2e}{mr^2}}t + \vartheta_0$$

L'altra legge di conservazione porge $\dot{\varphi} = 0$, quindi $\varphi_t \equiv \varphi_0$. Le soluzioni $\dot{\vartheta} = \pm\sqrt{\frac{2e}{mr^2}}$, $\varphi_t \equiv \varphi_0$ si chiamano *meridiani*.

d. Per calcolare le frequenze ed i modi normali di piccole oscillazioni bisogna calcolare $A(0)$, che è la matrice 1×1 la cui unica entrata è il numero mr^2. Bisogna calcolare la matrice Hessiana $V''(0)$, che ha per unica entrata il numero $\frac{c^2 r}{m(R+r)^3}$. Segue che la frequenza di piccole oscillazioni è $\omega = \frac{c}{m\sqrt{r(R+r)^3}}$. Le soluzioni della equazione linearizzata sono quindi

$$\vartheta_t = a\cos\left(\frac{c}{m\sqrt{r(R+r)^3}}t + b\right).$$

Osserviamo che, se una soluzione parte dall'equatore stabile in mezzo periodo incontra nuovamente l'equatore stabile. Mezzo periodo è $\frac{m\sqrt{r(R+r)^3}}{c}\pi$. In quel lasso di tempo φ aumenta di

$$\frac{m\sqrt{r(R+r)^3}}{c}\pi\frac{c}{m(R+r)^2} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{R+r}}\pi$$

□