Esercizio 72 *Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie di rivoluzione di equazioni parametriche*

$$x = \frac{R}{1+s^2}\cos\varphi, \quad y = \frac{R}{1+s^2}\sin\varphi, \quad z = Rs$$

($s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in S^1$), ove R è una costante positiva. Sul punto non agiscono forze attive.

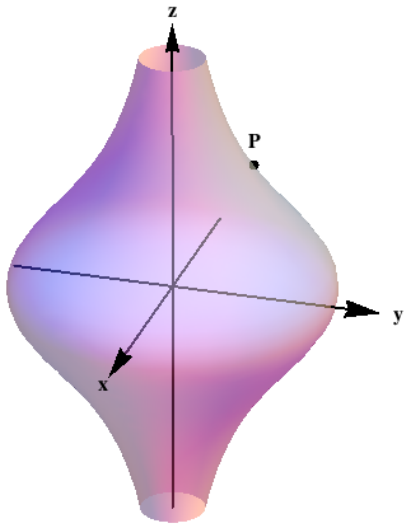
a. *Scrivere la Lagrangiana, usando le coordinate s, φ.*

b. *Scrivere la Lagrangiana del sistema ridotto (alla Routh) per il generico valore c del momento conservato.*

c. *Disegnare il ritratto in fase per il sistema ridotto per $c \neq 0$ e per $c = 0$.*

e. *Scrivere la legge oraria dei moti del sistema completo corrispondenti all'equilibrio del sistema ridotto nel caso $c \neq 0$ e descrivere qualitativamente i moti corrispondenti al caso $c = 0$.*

d. *Assumendo $c \neq 0$, calcolare le frequenze ed i modi normali di piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile del sistema ridotto.*



Svolgimento

a. La configurazione del sistema è data in coordinate Lagrangiane da

$$(s, \varphi) \mapsto \left(\frac{R}{1+s^2}\cos\varphi, \frac{R}{1+s^2}\sin\varphi, Rs\right)$$

La velocità del punto è

$$v_P = \dot{s}R\left(-\frac{2s}{(1+s^2)^2}\cos\varphi, -\frac{2s}{(1+s^2)^2}\sin\varphi, 1\right) + \dot{\varphi}R\left(-\frac{1}{1+s^2}\sin\varphi, \frac{1}{1+s^2}\cos\varphi, 0\right)$$

Quindi l'energia cinetica T, che coincide con la Lagrangiana L, è

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{s}^2R^2\left(1+\frac{4s^2}{(1+s^2)^4}\right)+\dot{\varphi}^2R^2\left(\frac{1}{(1+s^2)^2}\right)\right)$$

b. La variabile φ è ciclica, riduciamo alla Routh rispetto ad essa. La legge di conservazione è

$$\partial_{\dot{\varphi}}L = m\dot{\varphi}R^2\left(\frac{1}{(1+s^2)^2}\right) = c$$

da cui si deduce che

$$\dot{\varphi} = c(1+s^2)^2$$

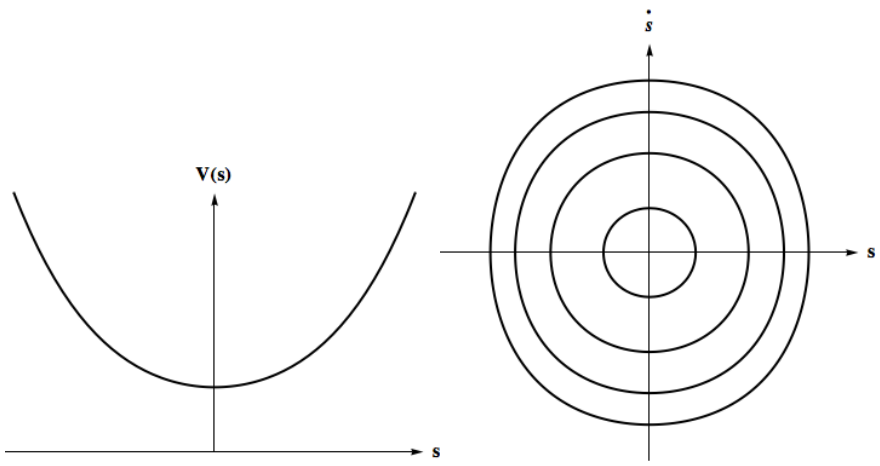
(abbiamo 'assorbito' tutte le costanti in c che ora ha dimensioni di $[sec^{-1}]$). La Lagrangiana ridotta è

$$\begin{aligned}
L_c^R &= -\frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2\left(\frac{R^2}{(1+s^2)^2}\right)+\frac{1}{2}m\dot{s}^2R^2\left(1+\frac{4s^2}{(1+s^2)^4}\right)\Big|_{\varphi=c(1+s^2)^2} = \\
&= -\frac{1}{2}mc^2(1+s^2)^2R^2+\frac{1}{2}m\dot{s}^2R^2\left(1+\frac{4s^2}{(1+s^2)^4}\right) = \\
&= \frac{1}{2}mR^2\left(1+\frac{4s^2}{(1+s^2)^4}\right)\dot{s}^2-\frac{1}{2}mc^2(1+s^2)^2R^2 \simeq \\
&\simeq \left(1+\frac{4s^2}{(1+s^2)^4}\right)\dot{s}^2-c^2(1+s^2)^2
\end{aligned}$$

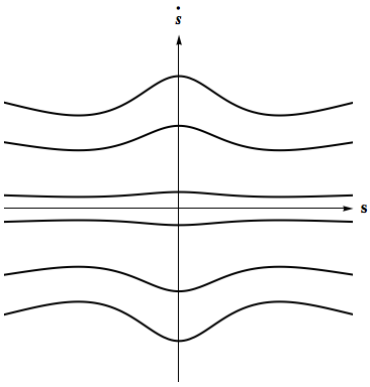
c. Questa è la Lagrangiana di un sistema conservativo 1D (nella coordinata Lagrangiana s) con potenziale

$$c^2(1+s^2)^2$$

La conservazione dell'energia permette di disegnare i ritratti in fase: se $c \neq 0$ allora il ritratto in fase è



Se invece $c = 0$ allora il ritratto in fase è dato da una deformazione delle rette $\dot{s} = cost$. Queste rette sono date dalle equazioni $\dot{s} = \frac{2e}{m}\frac{(1+s^2)^4}{(1+s^2)^4+4R^2s^2}$



d. Quando $c = 0$ allora la conservazione dell'energia dice che

$$\frac{1}{2}m\left(1+\frac{4R^2s^2}{(1+s^2)^4}\right)\dot{s}^2 = e,$$

quindi s_t risolve

$$\dot{s} = \pm\sqrt{\frac{2e(1+s^2)^4}{m((1+s^2)^4+4R^2s^2)}} = \pm\sqrt{\frac{2e}{m}}\frac{(1+s^2)^2}{\sqrt{(1+s^2)^4+4R^2s^2}}.$$

Questa equazione differenziale porge soluzioni difficili da scrivere ma monotone, perché la funzione a destra dell'uguale è sempre positiva. La conservazione del momento porge l'equazione $\dot{\varphi} = 0$, da cui segue che le soluzioni sono i *meridiani* percorsi in modo monotono a salire od a scendere. Osserviamo anche che, quando $e = 0$, vi sono le soluzioni di quiete

$$s_t = s_0, \qquad \varphi_t = \varphi_0$$

e. Per calcolare le frequenze ed i modi normali di piccole oscillazioni bisogna calcolare la matrice cinetica $A(0)$, che è la matrice 1×1 con unica entrata il numero m. Bisogna calcolare la matrice Hessiana di V, che è anch'essa il numero $V''(0)$. Siccome $V' = mc^2R^2(1+s^2)2s$, allora $V''(0) = 2mc^2R^2$. Quindi l'equazione secolare è $2c^2R^2 = \lambda$.

La frequenza di piccola oscillazione è quindi $\sqrt{2}cR$, tutti i modi di oscillazione sono normali (c'è uno spazio 1D). Le soluzioni della equazione linearizzata sono

$$s_t = a\cos(\sqrt{2}\,c\,R\,t + b)$$

All'equilibrio la soluzione per s è $s_t \equiv 0$ e $\dot{\varphi} \equiv c$. Quindi le soluzioni ricostruite sono rotazioni uniformi attorno al *parallelo* di lunghezza massima

$$s_t = 0, \qquad \varphi_t = \varphi_0 + ct$$

□